2.7 ポアッソン方程式

電磁気学詳論 I (2019)

田中担当クラス
http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html

第 2 章 静電場

2.7.1 静電ポテンシャルの満す方程式

静電場の方程式 (式 (2. 5. 54)，(2. 5. 55))

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,, \quad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0\,. \tag{1}$$

§2. 4 で見たように第 2 式から，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})$ と書ける．これを第 1 式に代入すると，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,. \tag{2}$$

ラプラシアン (Laplacian) 記号

$$\triangle := \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3}$$

を用いると，

ポアッソン (Poisson) 方程式

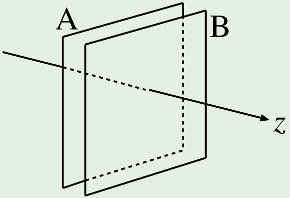
$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

を得る．特に，$\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ のとき，

ラプラス (Laplace) 方程式

$$\triangle\phi(\boldsymbol{r}) = 0\,. \tag{5}$$

例 1: 無限に広い 2 枚の平行導体板



導体板間の距離 d，A の電位を ϕ_A，B の電位を ϕ_B として，AB 間の電場を求める．導体板の法線を z 軸にとり，AB 間の電位差 $V := \phi_B - \phi_A$ を用いると，
$\boldsymbol{E} = (0, 0, -V/d)$.

A を $z = 0$，B を $z = d$ とする．対称性から $\phi(\boldsymbol{r})$ は z のみの関数で，$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi(z)$ と書ける．AB 間に電荷はないから，式 (5) より，

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi(z) = 0\,. \tag{6}$$

解は，$\phi(z) = c_1 + c_2 z$．境界条件 $\phi(0) = \phi_A$，$\phi(d) = \phi_B$ より，

$$c_1 = \phi_A\,, \quad c_2 = (\phi_B - \phi_A)/d\,. \tag{7}$$

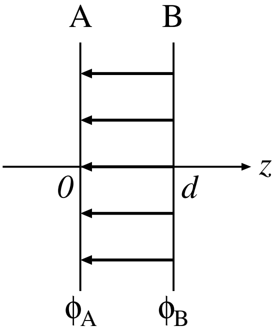
よって，

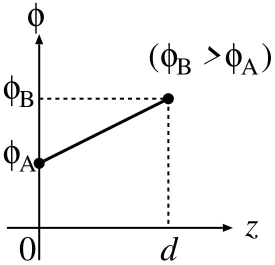
$$\phi(z) = \phi_A + (\phi_B - \phi_A)\frac{z}{d}\,. \tag{8}$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ より，

$$E_x = E_y = 0\,, \ E_z = -\frac{V}{d}\,. \tag{9}$$

電場は導体板に垂直で一定である.





球対称な場合のラプラシアン

$$\triangle = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r \tag{10}$$

証明のアイデア: $r = |\boldsymbol{r}|$ のみの関数 $f(r)$ に $\triangle$ を作用させる.

証明: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ゆえ，$\partial r/\partial x = x/r$ を使って，

$$\frac{\partial}{\partial x}f = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{d}{dr}f = \frac{x}{r}\frac{df}{dr}\,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{df}{dr}\right) = \boxed{}\,. \tag{12}$$

$\partial^2/\partial y^2$，$\partial^2/\partial z^2$ についても同様にして，

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{r}\frac{df}{dr} + \frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}rf\,. \tag{13}$$

球対称な場合の電場

$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi(r)$ より,

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi = -\frac{x}{r}\frac{d\phi}{dr}\,,\;\; E_y = -\frac{y}{r}\frac{d\phi}{dr}\,,\;\; E_z = -\frac{z}{r}\frac{d\phi}{dr}\,. \qquad (14)$$

つまり,

$$\boldsymbol{E}(r) = -\frac{d\phi}{dr}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,, \quad \hat{\boldsymbol{r}} := \frac{\boldsymbol{r}}{r}\ \text{(動径方向の単位ベクトル)}. \qquad (15)$$

例 2:一様な球状電荷分布

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho\,, & r < a \\ 0\,, & r > a \end{cases} \tag{16}$$

§§2. 5. 2 例 1 と同じ．ポテンシャルはどうなるか．

式 (4)，(10) より，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}(r\phi) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\,, & r < a \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0\,, & r > a \end{cases} \tag{17}$$

$r < a$ では，

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}r\,. \tag{18}$$

2 回積分して，

$$r\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{6} + c_2 r + c_1\,. \tag{19}$$

つまり，

$$\phi(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + c_2 + \frac{c_1}{r} \,. \tag{20}$$

$r > a$ では，

$$\frac{d^2}{dr^2}(r\phi) = 0 \,. \tag{21}$$

$$r\phi = d_2 r + d_1 \,. \tag{22}$$

$$\phi(r) = d_2 + \frac{d_1}{r} \,. \tag{23}$$

未定の積分定数は，境界条件により来まる．

一様な球状電荷分布の境界条件

- $r = 0$ で ϕ は有限．（発散しない．）$\Rightarrow c_1 = 0$.
- $r \to \infty$ で $\phi = 0$. $\Rightarrow d_2 = 0$.
- $r = a$ で E が連続．
  $\Rightarrow \phi(a-0) = \phi(a+0)$，$d\phi/dr|_{r=a-0} = d\phi/dr|_{r=a+0}$.

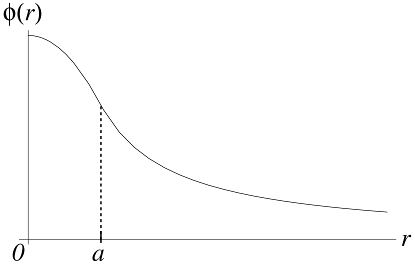
よって，

$$-\rho a^2/(6\varepsilon_0) + c_2 = d_1/a\,, \quad -\rho a/(3\varepsilon_0) = -d_1/a^2 \tag{24}$$

$$\Rightarrow \ d_1 = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\,,\ c_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\,. \tag{25}$$

まとめると，($Q = 4\pi a^3\rho/3$，全電荷)

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(a^2 - \dfrac{r^2}{3}\right), & r < a \\[2ex] \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}\,, & r > a \end{cases} \tag{26}$$



電場は動径方向成分のみで，($\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$)

$$E(r) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \begin{cases} \boxed{} & r < a \\ \boxed{} & r > a \end{cases} . \qquad (27)$$

(式 (2. 5. 27) と一致．)

2.7.2 ポアッソン方程式の解の一意性

ポアッソン方程式の解の一意性

電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の領域 V を考える．V の境界 S 上で境界条件が与えられれば，静電ポテンシャルは一意的に定まる．

証明のアイデア: ポアッソン方程式に 2 つの解があるとして，アーンショウの定理を用いて，それらが一致することを示す．

証明: 境界 S 上で境界条件を

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_0(\boldsymbol{r})\,, \quad \boldsymbol{r} \in S\,, \tag{28}$$

とする．ポアッソン方程式の V での 1 つの解を $\phi_1(\boldsymbol{r})$ とすると，

$$\triangle\phi_1(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,, \quad \boldsymbol{r} \in V\,. \tag{29}$$

もう 1 つの解を $\phi_2(\boldsymbol{r})$ とすると，

$$\triangle\phi_2(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0}\,, \quad \boldsymbol{r} \in V\,. \tag{30}$$

$U(\boldsymbol{r}) := \phi_1(\boldsymbol{r}) - \phi_2(\boldsymbol{r})$ とすれば,

$$\triangle U(\boldsymbol{r}) = 0\,, \quad \boldsymbol{r} \in V \quad \text{(ラプラス方程式)}. \tag{31}$$

§§2. 5. 2 で，アーンショーの定理「電荷のない領域ではポテンシャルは極小値も極大値もとらない」ことを示したが，U について同じことが式 (31) から言える．もし，U が極小値か極大値をもてば，$\triangle U \neq 0$ であるから，$U(\boldsymbol{r})$ は V で極小値も極大値もとらない．(極小値，極大値はあるとすれば境界 S 上にある．)

ϕ_1 も ϕ_2 も境界条件 (28) を満すから,

$$U(\boldsymbol{r}) = 0\,, \quad \boldsymbol{r} \in S\,. \tag{32}$$

従って，$U(\boldsymbol{r})$ が V で極小値も極大値もとらないことから,

$$U(\boldsymbol{r}) = 0\,, \quad \boldsymbol{r} \in V\,. \tag{33}$$

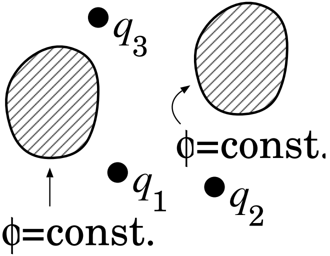
すなわち，V で ϕ_1 と ϕ_2 は一致する．

$$\phi_1(\boldsymbol{r}) = \phi_2(\boldsymbol{r})\,, \quad \boldsymbol{r} \in V\,. \tag{34}$$

(証明終)

2.7.3 鏡像法

導体と(分布の与えられた)点電荷を考える.

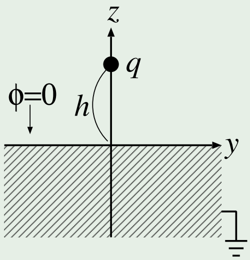


- 導体表面に誘導電荷が生じるため全電荷分布は問題を解いてみないと分からない. (表面電荷は電場によって決まる. cf. 式(2. 6. 1))
- 導体表面は等ポテンシャル.

導体表面が等ポテンシャルになるという境界条件でポアッソン方程式を解き，導体外部の ϕ を求めることになる. (境界値問題)

一般に解くのは難しいが，既知の電荷分布に対する ϕ をもとにして，ポアッソン方程式を解かずに ϕ が分かる場合がある.

例 1: 無限に広い接地された導体平面



$z \leq 0$ の領域が接地された導体で満たされていて，$\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, h)$ に電荷 q が置かれている．このとき，$z > 0$ での ϕ(と $\boldsymbol{E}$) を求める．

導体表面では，

$$\phi(x, y, 0) = 0 \tag{35}$$

電荷 q の作るポテンシャルは

$$\phi_+(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} \tag{36}$$

これは式 (35) を満たしていない．そこで，$\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, -h)$ に仮想的な電荷 $-q$ を置いてみる．(これを鏡像電荷という．)

この電荷の作るポテンシャルは

$$\phi_-(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{|\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}_0|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}} \tag{37}$$

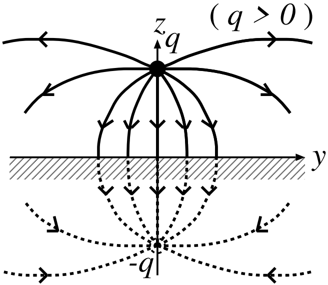
全ポテンシャルは，

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= \phi_+(\boldsymbol{r}) + \phi_-(\boldsymbol{r}) \qquad (38)\\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+h)^2}}\right]\end{aligned}$$

これは境界条件 (35) を満たしている．また，

$$\triangle\phi_-(\boldsymbol{r}) = 0\,, \quad z > 0\,, \tag{39}$$

だから，式 (38) の ϕ は $z > 0$ でポアッソン方程式を満たしている．従って，解の一意性より，式 (38) が $z > 0$ での解．



電気双極子の作る電場 (の半分) と同じ.
電場は,

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{40}$$

$$= \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\{x^2+y^2+(z-h)^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{x^2+y^2+(z+h)^2\}^{3/2}}\right],$$

$$E_y = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\{x^2+y^2+(z-h)^2\}^{3/2}} - \frac{1}{\{x^2+y^2+(z+h)^2\}^{3/2}}\right],$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z-h}{\{x^2+y^2+(z-h)^2\}^{3/2}} - \frac{z+h}{\{x^2+y^2+(z+h)^2\}^{3/2}}\right].$$

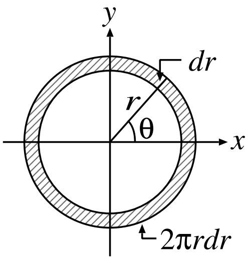
導体表面 ($z=0$) では，

$$\boxed{}\,. \tag{41}$$

(導体表面に垂直になっている．)

導体表面の (誘導された) 電荷の面密度は，式 (2. 6. 1) より，

$$\sigma(x,y)=\varepsilon_0 E_z(x,y,0)=-\frac{qh}{2\pi}\frac{1}{(x^2+y^2+h^2)^{3/2}}\,. \tag{42}$$



全誘導電荷は，xy 平面の極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$dxdy=rdrd\theta$ を用いて

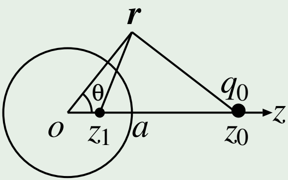
$$\begin{aligned}\int\sigma(x,y)dxdy&=-\frac{qh}{2\pi}\int\frac{rdrd\theta}{(r^2+h^2)^{3/2}}\\&=-\frac{qh}{2\pi}2\pi\int_0^\infty\frac{rdr}{(r^2+h^2)^{3/2}}=-q\,.\end{aligned} \tag{43}$$

(確かに鏡像電荷に一致している!) $\boxed{\text{問 : 最後の等号を示せ.}}$

電荷 q の受けるクーロン力は鏡像電荷から受ける力と同じで,

$$\boldsymbol{F} = \left(0, 0, -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2h)^2}\right). \tag{44}$$

例 2: 接地された導体球



半径 a とし，$\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, z_0)$ に電荷 q_0 がある．鏡像電荷 q_1 を $\boldsymbol{r}_1 = (0, 0, z_1)$ に置いてみる．q_1，z_1 を境界条件から決めればよい．

$\boldsymbol{r} = (r \sin\theta, 0, r\cos\theta)$，$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i| = \sqrt{r^2 - 2rz_i \cos\theta + z_i^2}$ などを用いて，

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} + \frac{q_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_0}{\sqrt{r^2 - 2rz_0\cos\theta + z_0^2}} + \frac{q_1}{\sqrt{r^2 - 2rz_1\cos\theta + z_1^2}}\right]
\end{aligned}
\tag{45}
$$

$$
= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_0/r}{\sqrt{1-2(z_0/r)\cos\theta+(z_0/r)^2}}\right.
$$

$$
\left.+\frac{q_1/z_1}{\sqrt{1-2(r/z_1)\cos\theta+(r/z_1)^2}}\right]
$$

$r = a$，任意の θ で $\phi = 0$ となるためには，

$$
\frac{z_0}{a} = \frac{a}{z_1}\,,\;\; \frac{q_0}{a} + \frac{q_1}{z_1} = 0\,. \tag{46}
$$

よって，

$$
z_1 = \frac{a^2}{z_0}\,,\;\; q_1 = -\frac{z_1}{a}q_0 = -\frac{a}{z_0}q_0\,. \tag{47}
$$