第3章 定常電流と静磁場

3.1 電流と電荷保存則

電磁気学詳論 I (2019)

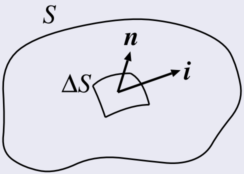
田中担当クラス
http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html

第 3 章 定常電流と静磁場

3.1.1 電流と電流密度

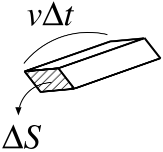
電流密度 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t)$

単位時間に単位面積を (垂直に) 通る電荷の量 (ベクトル)．単位は C/(m^{2}s)．



時間 Δt の間に面 ΔS(法線ベクトル $\boldsymbol{n}$) を通って流れる電荷の量は，

$$\Delta q = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S \Delta t = \boldsymbol{i} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \Delta t \,. \tag{1}$$



一方，電荷分布を ρ として，その電荷の平均移動速度を $\boldsymbol{v}$ とすると，

$$\Delta q = \rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \Delta S \Delta t = \rho \boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{S} \Delta t \,. \tag{2}$$

よって，

$$\boldsymbol{i} = \rho \boldsymbol{v}\,. \tag{3}$$

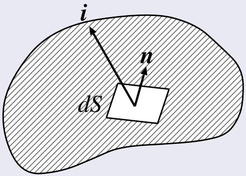
電荷分布が (電子のような) 点電荷からなっていて，その電荷を q，平均速度を $\boldsymbol{v}$，数密度を n とすると，

$$\boldsymbol{i} = nq\boldsymbol{v}\,. \tag{4}$$

電流 I

ある面 S を単位時間に通る電荷の量.

$$I = \int_S \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\, dS = \int_S \boldsymbol{i}\cdot d\boldsymbol{S}\,. \tag{5}$$



単位は A(アンペア):=C/s.

3.1.2 電荷保存則

電荷の総量は変化しない．これを式で表すと，

電荷保存則

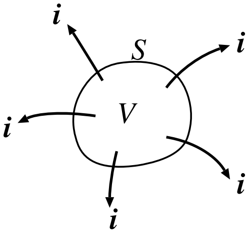
$$\nabla \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{r}, t) = 0\,. \tag{6}$$

(連続の方程式の一種．)

証明のアイデア: 式 (5) で閉曲面を考え，ガウスの定理を適用する．

証明: 閉曲面 S から流れ出す電流を考える．

$$I = \int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S}\,. \tag{7}$$



これは，S に囲まれた領域 V 内の単位時間あたりの電荷の減少に等しいはず．

$$\int_S \boldsymbol{i} \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{dQ_{\mathrm{int}}}{dt}\,, \quad Q_{\mathrm{int}} = \int_V \rho\, dV\,. \tag{8}$$

左辺にガウスの定理を適用すると，

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{i}\, dV + \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = 0\,. \tag{9}$$

V が時間的に変化しなければ，微分と積分の順序を交換でき，

$$\int_V \left(\nabla \cdot \boldsymbol{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0\,. \tag{10}$$

V は任意ゆえ，式 (6) を得る．(証明終)

定常電流

$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$，$\rho = \rho(\boldsymbol{r})$ (t によらない)．このとき，式 (6) より，

$$\nabla \cdot \boldsymbol{i} = 0\,. \tag{11}$$

定常電流にはわき出しがない．つまり，閉じた経路に沿って流れるループになっている．

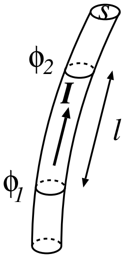
3.1.3 オーム (Ohm) の法則

オームの法則

電場をかけると電流が流れるような物質について，

$$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) = \sigma \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \quad \sigma = \text{電気伝導率 (物質定数)}. \tag{12}$$

(電場が強いと成り立たない場合もある．) 定常電流でない場合にも，時間的変動がゆっくりであれば成り立つ．



断面積 S の一様な (細い) 導線を考える．距離 ℓ の 2 点の電位差を $V = \phi_1 - \phi_2$ として，流れる電流を I とする．電場は，

$$E = \frac{V}{\ell}. \tag{13}$$

電流密度は，

$$i = \frac{I}{S}. \tag{14}$$

$i = \sigma E$ より，

$$\frac{I}{S} = \sigma \frac{V}{\ell} \,. \tag{15}$$

$$R := \frac{\ell}{\sigma S} \text{ (電気抵抗)} \tag{16}$$

を用いると，

オームの法則

$$V = RI \,. \tag{17}$$

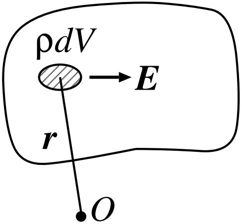
R の単位は V/A=:Ω(オーム)． σ の単位は 1/(Ωm)．

電流のする仕事率 P(単位時間あたりの仕事)

$$P = \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\, dV = \int \frac{\boldsymbol{i}^2(\boldsymbol{r})}{\sigma}\, dV\,. \tag{18}$$

2 番目の等号では，式 (12) を用いた．

<u>証明のアイデア</u>: 電場がする仕事を考える．



<u>証明</u>: 電場がする仕事は，($\rho\, dV$ は電荷，$d\boldsymbol{r}$ は変位)

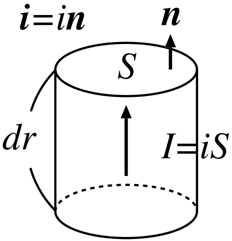
$$dW = \rho\, dV\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}\,. \tag{19}$$

電流の仕事率は，($\rho\, d\boldsymbol{r}/dt = \rho \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}$)

$$P = \frac{d}{dt} \int_V dW = \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \rho \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dV = \int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})\, dV\,. \tag{20}$$

(証明終)

細い一様な導線の場合



$\boldsymbol{E}$ は S 上で一定だから，断面の積分を実行すると，

$$\int_S \boldsymbol{i}\, dS\, dr = \boldsymbol{n}\, iS\, dr = I\boldsymbol{n}dr = Id\boldsymbol{r}\,. \qquad (21)$$

$Id\boldsymbol{r}(= I\boldsymbol{n}dr)$ を電流素片と呼ぶ.

$$P = I\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = IV = I^2R = \frac{V^2}{R}\,. \qquad (22)$$

P の単位は J/s=W(ワット).

電流のした仕事は，金属などの場合，伝導電子 (自由電子) とイオンとの衝突により，熱エネルギー (ジュール熱) になる.