3.2 ローレンツ力

電磁気学詳論 I (2019)

田中担当クラス
http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html

第 3 章 定常電流と静磁場

3.2.1 電荷に働く力

静止している電荷 q ($\boldsymbol{v} = 0$)

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}\,. \quad (\text{クーロン力}) \tag{1}$$

速度 $\boldsymbol{v}$ で動いている電荷 q

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\,, \quad \boldsymbol{B} = \text{磁束密度 (磁場)}\,. \tag{2}$$

速度に比例し，速度に垂直な (仕事をしない) 力がある．
式 (2) は電磁場 ($\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$) が時間によっているときも正しい．

ローレンツ (Lorentz) 力

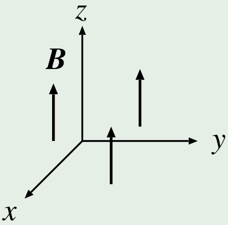
$$\boldsymbol{F} = q\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)\right]\,, \quad \boldsymbol{r} = \text{電荷の座標}\,, \quad t = \text{時間}\,. \tag{3}$$

磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の単位

$$\frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{C\,m}} = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{A}}\frac{1}{\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{Wb}(\text{ウェーバー})}{\mathrm{m}^2} =: \mathrm{T}(\text{テスラ})\,. \tag{4}$$

$(\mathrm{Wb} := \mathrm{Nm/A} = \mathrm{J/(C/s)} = \mathrm{Vs})$

例 1: 一様な定常磁場中の点電荷の運動



$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ の中を，質量 m の点電荷 q が運動している．
磁力線に巻きつくような螺旋運動を行なう．

速度を $\boldsymbol{v}$ とすると，運動方程式は，

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\,. \tag{5}$$

$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = (v_x, v_y, v_z) \times (0, 0, B) = (v_y B, -v_x B, 0)$ ゆえ，式 (5) を成分で書くと，

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega v_y\,, \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_x\,, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0\,, \quad \omega := \frac{q}{m} B\,. \tag{6}$$

z 方向の運動は，

$$v_z = v_{z0}\ (\text{定数})\,. \tag{7}$$

v_y を消去すると，

$$\frac{d^2}{dt^2} v_x = -\omega^2 v_x\,. \tag{8}$$

よって，

$$v_x = v_\perp \cos(\omega t + \beta)\,, \quad v_y = -v_\perp \sin(\omega t + \beta)\,.\ (v_\perp\,,\ \beta\ \text{は定数}) \tag{9}$$

(注: $v_x^2 + v_y^2 = v_\perp^2$． $v_\perp$ は速度の z 軸に垂直な成分の大きさ．)

これを t で積分して，

$$x = \frac{v_\perp}{\omega}\sin(\omega t + \beta) + x_0\,,\ \ y = \frac{v_\perp}{\omega}\cos(\omega t + \beta) + y_0\,. \tag{10}$$

(x_0, y_0: 定数) これより，

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left(\frac{v_\perp}{\omega}\right)^2\,. \tag{11}$$

すなわち，半径 $v_\perp/\omega = v_\perp m/(qB)$ の円．z 方向は式 (7) より，

$$z = v_{z0} t + z_0\,,\ \text{等速運動.} \tag{12}$$

よって，一定の半径のらせん運動をする．
点電荷の運動エネルギーは，

$$\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{m}{2}(v_\perp^2 + v_{z0}^2) = \text{一定}\,. \tag{13}$$

(磁場による力は仕事をしない．)

3.2.2 磁場中の電流に働く力

電流素片に働く力

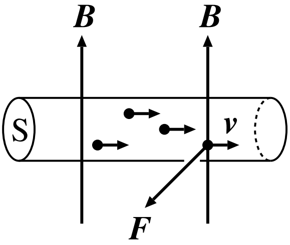
$$d\boldsymbol{F} = Id\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}\, dr\,,\ \ \boldsymbol{I}dr := Id\boldsymbol{r}\,. \tag{14}$$

証明のアイデア: 1個の点電荷が受ける力を考えて，式(3. 1. 4)を用いる.

証明: 点電荷 q が平均速度 $\boldsymbol{v}$ で移動していると考えると，1個の電荷が受ける力は，$q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. 電荷の数密度を n とすると微小体積 dV の受ける力は，(ndV が電荷の個数)

$$ndVq\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}\, dV\,. \tag{15}$$

(式(3. 1. 4)を用いた．)

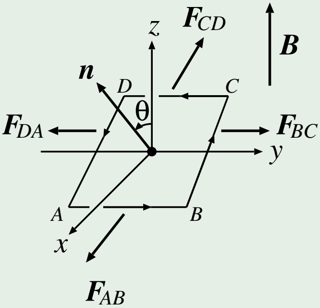


式 (3. 1. 21) のように断面 S について積分すると，電流素片が受ける力は，

$$d\boldsymbol{F} = \int_S \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{B}\, dS dr = I d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}\,. \tag{16}$$

となり，後は $\boldsymbol{I} dr := I d\boldsymbol{r}$ を用いればよい．(証明終)
(q に依存しないことに注意．)

例 1: ループ電流に働く力



一様な磁場中の長方形ループ電流 $ABCD$ を考える．$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$．$AB = a$, $BC = b$．ループ面は y 軸を通り，その法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は z 軸と角度 θ をなす．このとき，ループ電流にはトルク

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}\,. \tag{17}$$

が働く．ただし，

$$\boldsymbol{m} := Iab\boldsymbol{n}\,.\ \underline{\text{磁気双極子モーメント}} \tag{18}$$

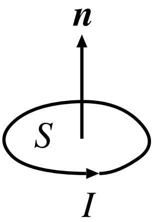
導線 AB に働く力は，CD に働く力と逆向きで同じ大きさ．BC と DA も同様．従って，ループ全体に働く力はゼロ．しかし，y 軸のまわりに回転させようとするトルク (偶力) がある．

$$F_{AB} = F_{CD} = IBa\,. \tag{19}$$

よって，トルクは，

$$\boldsymbol{T} = -\hat{\boldsymbol{y}} IBa\, b \sin\theta = -\hat{\boldsymbol{y}} IabB \sin\theta = Iab\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}\,. \tag{20}$$

平面回路を流れる電流の磁気双極子モーメント



平面回路の面積を S，電流を I，法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$(右ねじの進む方向) とすると，

$$\boldsymbol{m} = IS\boldsymbol{n}\,, \quad \text{単位: } \mathrm{Am}^2\,. \tag{21}$$

cf. 電気双極子モーメント

(遠方から見ると，ループ電流 $\sim$ 小さい棒磁石)