2.9 静電エネルギー

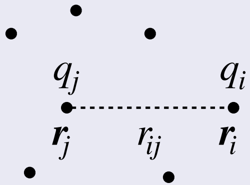
電磁気学詳論 I (2020)

田中担当クラス
http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/~tanaka/teaching.html

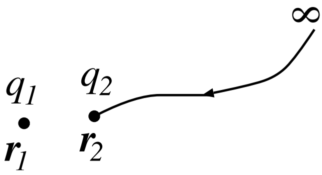
第 2 章 静電場

2.9.1 電荷分布のエネルギー

点電荷系のエネルギー



$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}, \qquad r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|. \tag{1}$$



証明のアイデア: まず 1 対の点電荷について考える.

証明: 点電荷対のエネルギーは，q_1 を固定して考えると，無限遠から q_2 を $\boldsymbol{r}_2$ まで移動させるのに必要な仕事だから，

式 (2. 4. 6) で $r_A \to \infty$，$r_B = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = r_{12}$，$q = q_1$ として，

$$U_e = q_2 w = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}. \tag{2}$$

次に点電荷が3個以上あるときを考える．1つの電荷 q_i に働く力は $q_j(j \neq i)$ から受ける力の和であるから，q_i を無限遠から $\boldsymbol{r}_i$ まで運ぶのに必要な仕事は，$q_j(j \neq i)$ と q_i の対のエネルギーの和になる．従って，全静電エネルギーは，

$$U_e = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|. \tag{3}$$

ここで，最初の和，$\sum_{i<j}$ は，すべての対についての 和を表わしている．2番目の和，$\sum_{i\neq j}$ に $\frac{1}{2}$ の因子がかかっているのは，各対について2回数えているからである．(証明終)
また，

$$U_e = \frac{1}{2}\sum_{i} q_i \phi_i(\boldsymbol{r}_i), \quad \phi_i(\boldsymbol{r}_i) := \sum_{j\neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \tag{4}$$

とも書ける．$\phi_i(\boldsymbol{r}_i)$ は q_i 以外の電荷が $\boldsymbol{r}_i$ に作るポテンシャル．

連続的な電荷分布のエネルギー

$$U_e = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV\,. \tag{5}$$

$\because$ 式 (1) で和を積分に置き換えて，

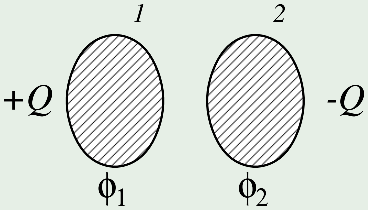
$$U_e = \frac{1}{2}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}_1)\rho(\boldsymbol{r}_2)}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\,dV_1 dV_2\,. \tag{6}$$

後は，式 (2. 4. 19)

$$\phi(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|}\,dV_2$$

用いればよい．

例: コンデンサーのエネルギー



導体外では $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$ ゆえ,

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\text{導体 }1} \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV + \frac{1}{2}\int_{\text{導体 }2} \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2}\phi_1 \int_{\text{導体 }1} \rho(\boldsymbol{r})\,dV + \frac{1}{2}\phi_2 \int_{\text{導体 }2} \rho(\boldsymbol{r})\,dV$$

(導体は等ポテンシャル)

$$= \frac{1}{2}\phi_1 Q - \frac{1}{2}\phi_2 Q = \frac{1}{2}Q(\phi_1 - \phi_2)$$

$$= \frac{Q^2}{2C} \quad \Leftarrow Q = C(\phi_1 - \phi_2)\,.$$

cf. (2. 8. 28)

2.9.2 電場のエネルギー密度

Q. エネルギーはどこにあるのか？

A. 静電場ではどこともいえない．

式 (5) では電荷に付随しているように見える．しかし，電磁波は電荷のない空間を伝わり，エネルギーを運ぶ．

$\Rightarrow$ 場に付随させるほうがもっともらしい．

電場のエネルギーとエネルギー密度

$$U_e = \int u_e(\boldsymbol{r})\, dV\,, \quad u_e(\boldsymbol{r}) := \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r}) \tag{8}$$

(これは静電場以外にも拡張できる．)

証明のアイデア: ポアッソン方程式を用いて，式 (5) から ρ を消去する．

証明: ポアッソン方程式 $\triangle\phi = -\rho/\varepsilon_0$ を用いると，

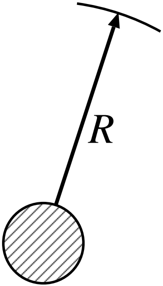
$$U_e = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,dV = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (\Delta\phi)\phi\,dV\,. \tag{9}$$

$\phi\triangle\phi = \phi\boldsymbol{\nabla}^2\phi = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{\nabla}\phi) - (\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)$ を用いると，

$$U_e = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{\nabla}\phi)\,dV - \int (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2\,dV\right]\,. \tag{10}$$

$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ を用いて，

$$Ue = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{E})\,dV + \int \boldsymbol{E}^2\,dV\right]\,. \tag{11}$$



第 1 項の積分は，ガウスの定理を用いて，

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{E})\,dV = \int_S \phi\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{12}$$

電荷分布が有限の範囲にあるとして，V として十分大きな球 (半径 R) をとる．S は半径 R の球面．十分遠方では点電荷のように見えるはずだから，

$\phi \sim 1/R$，$E \sim 1/R^2$，$\int dS \sim R^2$．よって，この積分は ($R \to \infty$ として) ゼロ．(証明終)

例: 一様に帯電した球

半径 a，電荷密度 ρ．§§2. 5. 2 の例 1，式 (2. 5. 27) の E から，

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2(r) 4\pi r^2 \, dr \tag{13}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \left[\int_0^a \frac{r^2}{a^6} 4\pi r^2 \, dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 \, dr \right]$$

$$= \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} . \qquad \text{cf. 式 (2. 8. 32)}$$

($a \to 0$ の極限で電荷 Q の点電荷となるが，このとき，$U_e \to \infty$．)