量子力学 2 演習　　No.10　00/6/22

1. ハミルトニアン $\hat{H}$ がユニタリー変換 $\hat{U}$ に対して不変であるとする。すなわち、$\hat{U}^{-1}\hat{H}\hat{U} = \hat{H}$ である。

   (a) $|\psi(t)\rangle$ が Schrödinger 方程式の解であるとき、$\hat{U}|\psi(t)\rangle$ も Schrödinger 方程式を満たすことを示せ。

   (b) $\hat{U} = \exp(ia\hat{T})$ (a は実数) とすると $\hat{T}$ はエルミート演算子であることを示せ。また、$\hat{T}$ はハミルトニアンと可換であることを示せ。

   (c) 時刻 t_0 での状態 $|\psi(t_0)\rangle$ が $\hat{T}$ の固有値 λ に対応する固有状態であったとすると、この状態が時間発展した後の状態すなわち $|\psi(t)\rangle$ も $\hat{T}$ の同じ固有値に対応する固有状態であることを示せ。

   (d) 演算子 $\hat{T}$ の状態 $|\psi\rangle$ についての期待値が時間に依らないことを Heisenberg 描像で示せ。

   (e) $\hat{U}$ を No.2 の 1. の並進演算子としたとき、上の各問の結果はどう解釈できるか。

2. N 個の粒子からなる孤立系を考える。空間が一様等方であるならば、この系は回転と並進に対して不変である。

   (a) 古典的には、各粒子の位置および運動量は回転と並進で次のように変化する。

   $$\boldsymbol{r}_i \mapsto M\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{a}\ ,\ \ \boldsymbol{p}_i \mapsto M\boldsymbol{p}_i\ \ (i = 1, 2, \cdots N) \tag{1}$$

   ただし、M は 3 行 3 列の直交行列で、$\boldsymbol{a}$ は 3 成分の定ベクトルである。量子力学でこれに対応する変換として、ユニタリー演算子 $\hat{U}(M, \boldsymbol{a})$ を考え、状態 $|\psi\rangle$ を $\hat{U}(M, \boldsymbol{a})|\psi\rangle$ に写すものとする。このとき、変換 (1) が期待値の意味で成り立つためには、位置および運動量の演算子 $\hat{\boldsymbol{r}}_i$、$\hat{\boldsymbol{p}}_i$ はどのように変換するべきか。

   (b) 具体的に $\hat{U}(M, \boldsymbol{a})$ を構成するために無限小変換を考える。すなわち、

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_i &\mapsto M(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\epsilon} + O(\boldsymbol{\theta}^2) \\ \boldsymbol{p}_i &\mapsto M(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{p}_i + O(\boldsymbol{\theta}^2) \end{aligned} \tag{2}$$

   である。対応する $\hat{U}$ は、

   $$\hat{U}(M(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\epsilon}) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\boldsymbol{P}} + O(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\epsilon}\text{の 2 次})$$

   と書ける。ここで $\hat{\boldsymbol{J}}$、$\hat{\boldsymbol{P}}$ は回転および並進の生成子であり、エルミートである。前問の結果を用いて、次の交換関係を求めよ。

   $$[\hat{r}_i^a, \hat{P}^b],\ [\hat{p}_i^a, \hat{P}^b],\ [\hat{r}_i^a, \hat{J}^b],\ [\hat{p}_i^a, \hat{J}^b]$$

   (c) $\hat{\boldsymbol{P}} = \sum_{i=1}^N \hat{\boldsymbol{p}}_i$、$\hat{\boldsymbol{J}} = \sum_{i=1}^N \hat{\boldsymbol{r}}_i \times \hat{\boldsymbol{p}}_i$ とすると、前問で得られた交換関係が満たされていることを示せ。

   (d) 前問で定義された $\hat{\boldsymbol{P}}$、$\hat{\boldsymbol{J}}$ を用いて、$[\hat{J}^a, \hat{J}^b]$、$[\hat{J}^a, \hat{P}^b]$、$[\hat{P}^a, \hat{P}^b]$ を計算せよ。

3. 式 (1) で $M = -1$、$\boldsymbol{a} = 0$ とすれば空間反転が得られる。これに対応する演算子 (パリティ演算子) を $\hat{U}(-1, 0) = \hat{\mathcal{P}}$ と書くことにする。

   (a) 式 (2) の無限小変換をいくら繰り返しても空間反転にはならないことを説明せよ。

   (b) 1 粒子系の位置および運動量の固有状態 $|\boldsymbol{r}\rangle$、$|\boldsymbol{p}\rangle$ はパリティ演算子の作用のもとでどのように変換するか。

   (c) $\hat{\mathcal{P}}$ はエルミートであることを示せ。

   (d) $\hat{\mathcal{P}}$ と $\hat{\boldsymbol{P}}, \hat{\boldsymbol{J}}$ との交換関係を求めよ。