量子力学第二演習　　No.11　00/6/29

1. 角運動量演算子 $\vec{J}$ を、交換関係

$$[J_a, J_b] = i\hbar \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} J_c$$

を満たすものとして定義する。

(1) $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ と J_3 が交換することを示せ。これにより、J^2 と J_3 には同時固有ケット $|\alpha, \beta>$ が存在し、

$$\begin{aligned} J^2|\alpha,\beta> &= \alpha|\alpha,\beta>, \\ J_3|\alpha,\beta> &= \beta|\alpha,\beta> \end{aligned}$$

を満たす。

(2) $J_+ = J_1 + iJ_2$, $J_- = J_1 - iJ_2$ に対し、交換関係 $[J_3, J_+]$, $[J_3, J_-]$, $[J_+, J_-]$ を計算せよ。

(3) (2) の結果を使って、$J_+|\alpha,\beta>$, $J_-|\alpha,\beta>$ は J_3 の固有ケットであることを示し、固有値を求めよ。

(4) $|\alpha,\beta>$ が演算子 J_-J_+ の固有ケットでもあることを示し、その固有値を求めよ。さらに、その固有値が非負であることを示せ。

(5) α の値が固定されているとしよう。このとき、β の値は制限されており、最大値 β' と最小値 β'' があることを示せ。

(6) (3) および (5) の結果から、

$$J_+|\alpha,\beta'>=0, \quad J_-|\alpha,\beta''>=0$$

であることを示せ。

2. 問題 1 の続きで以下の問いに答えよ。

(1) $J^2 = J_3(J_3 + \hbar) + J_-J_+$ を示せ。この結果を使って、α と β' の間の関係を求めよ。

(2) (1) と同様にして、α と β'' の間の関係を求めよ。

(3) (1) と (2) の結果から、$\beta' + \beta'' = 0$ を示せ。

(4) $|\alpha,\beta''>$ に J_+ を何回もかけてゆくことにより、$(\beta' - \beta'')/\hbar$ は必ず整数になることを示せ。

(5) $<\alpha,\beta|J_-J_+|\alpha,\beta>$ の値を計算せよ。その結果から、J_+ の $|\alpha,\beta>$ に対する作用を具体的に書き下せ。

(6) $<\alpha,\beta|J_+J_-|\alpha,\beta>$ の値を計算せよ。その結果から、J_- の $|\alpha,\beta>$ に対する作用を具体的に書き下せ。

3. 二つの独立な系をあわせることを考える。それぞれの角運動量演算子は $\hat{\boldsymbol{J}}_1$、$\hat{\boldsymbol{J}}_2$ で、互いに交換し、それぞれ式 $[\hat{J}^a, \hat{J}^b] = i\hbar \sum_{c=1}^{3} \epsilon^{abc} \hat{J}^c$ を満たす。あわせた系全体の角運動量演算子は $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}_1 + \hat{\boldsymbol{J}}_2$ と書ける。それぞれの系の状態を $|j_1, m_1\rangle$、$|j_2, m_2\rangle$ とすると、あわせた系の状態は $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ と書ける。この状態に対して、$\hat{\boldsymbol{J}}$ は $\hat{\boldsymbol{J}}|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle = \hat{\boldsymbol{J}}_1|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle + |j_1, m_1\rangle\hat{\boldsymbol{J}}_2|j_2, m_2\rangle$ と作用する。

(a) j_1、j_2 が固定されているとき、状態の数は何個か。

(b) $\hat{J}^3/\hbar$ の固有値 m のとり得る値が $j_1 + j_2$ から $-(j_1 + j_2)$ の整数であることを示し、それぞれの m の値に属する状態の数 (多重度) を調べよ。

(c) m の最大値に対応する状態 $|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle$ が $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有状態であることを示し、その固有値が $\hbar^2(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)$ であることを示せ。(ヒント：$\hat{J}^+|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle$ を評価し、$\hat{\boldsymbol{J}}^2 = \hat{J}^3(\hat{J}^3 + \hbar) + \hat{J}^-\hat{J}^+$ を用いよ。)

(d) 前問の結果より、$|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle$ に $\hat{J}^-$ を順次作用させて、$\hat{\boldsymbol{J}}^2/\hbar^2$ が $(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)$ で $\hat{J}^3/\hbar$ が $j_1 + j_2, \cdots, -(j_1 + j_2)$ の状態を得ることができる。これらの状態を除いた残りの状態 (すなわち、これらの状態と直交するすべての独立な状態) について、m のとり得る値とそれぞれの m の値に属する状態の数 (多重度) を調べよ。

(e) 3c 以下の議論を繰り返して、$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値を $\hbar^2 j(j+1)$ と書いたときの j のとり得る値とその多重度を調べよ。(例えば、$j = j_1 + j_2$ が可能でその多重度は 1 である。) また、j と m で指定される状態の数の総和が 3a で求めた状態の数に等しいことを示せ。

(f) 結局、あわせた系の状態は $\hat{\boldsymbol{J}}^2$ と $\hat{J}^3$ の固有値で一意的に表されることが分かったので、それらを $|j, m\rangle\rangle$ と書くことにする。$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ を $|j, m\rangle\rangle$ で展開したときの係数 (Clebsch-Goldan 係数) を $C^{j,m}_{m1,m2} = \langle\langle j, m|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ と書く。$j_1 = j_2 = 1/2$ のとき、上の角運動量の合成を実際に行って、すべてのゼロでない Clebsch-Goldan 係数を求めよ。