量子力学 2 演習　　No.12　00/7/6

1. No.11 の問題 2(1)、(4) より、$\beta' = J$ と書くと、$2J/\hbar$ は必ず整数になることがわかる。簡単な $J/\hbar = 1/2, 1$ の場合を考えてみよう。

   (a) $J/\hbar = 1/2$ の場合に、α の値および行列要素 $\langle \alpha, \beta_j, |J_a| \alpha, \beta_l \rangle$ を計算し、J_1, J_2, J_3 の行列表示を求めよ。結果は Pauli 行列

   $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   を使って書くこと。

   (b) $J/\hbar = 1$ の場合に、α の値および行列要素 $\langle \alpha, \beta_j, |J_a| \alpha, \beta_l \rangle$ を計算し、J_1, J_2, J_3 の行列表示を求めよ。

2. これまでに見てきたように、角運動量演算子を交換関係

   $$[\hat{J}^a, \hat{J}^b] = i\hbar \sum_{c=1}^{3} \epsilon^{abc} \hat{J}^c \tag{1}$$

   を満たすものとして定義すると、角運動量の大きさ J ($\boldsymbol{J}^2$ の固有値が $J(J+\hbar)$) は、$J = \hbar n/2$ (ただし、n はゼロまたは正の整数) となる。すなわち、角運動量の大きさは ($\hbar$ を単位として) 整数か半整数の値をとり得る。

   (a) 角運動量の大きさが $J = \hbar j$ で、$\hat{J}^3$ の固有値が $\hbar m$ であるような状態を $|j, m\rangle$ と書くことにする。z 軸のまわりに 1 回転すると $|j, m\rangle$ はどのように変換するか。j が整数の場合と半整数の場合に分けて答えよ。
   (ヒント：有限回転の演算子は $\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\boldsymbol{J}}\right)$。)

   (b) 状態 $|\psi\rangle$ の位置の固有ケット $|\boldsymbol{r}\rangle$ による展開が一意的であるとすると、波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は一価であることを示せ。

   (c) ここまでの結果は、量子力学的な系には座標以外にも何か系を特徴付ける変数があり得ることを示唆している。すなわち、角運動量の演算子 $\hat{\boldsymbol{J}}$ は軌道角運動量 $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ だけでは一般的に記述できない。そこで、スピン角運動量と呼ばれるものを導入し、その演算子を $\hat{\boldsymbol{S}}$ と書こう。これはある粒子の固有の角運動量に対応する。$\hat{\boldsymbol{S}}$ は座標および運動量の演算子と可換で、交換関係 $[\hat{S}^a, \hat{S}^b] = i\hbar \sum_{c=1}^{3} \epsilon^{abc} \hat{S}^c$ を満たす。全角運動量を $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$ とすると、$\hat{\boldsymbol{J}}$ は式 (1) を満たすことを示せ。

3. $2j+1$ 個の状態ベクトル $|j, m\rangle$ $(m = j, \cdots, -j)$ が $\hat{\boldsymbol{J}}$ の作用に対して、

   $$\begin{aligned} \hat{J}^3|j,m\rangle &= \hbar m |j,m\rangle \\ \hat{J}^+|j,m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j,m+1\rangle \\ \hat{J}^-|j,m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j,m-1\rangle \end{aligned} \tag{2}$$

   と変換するとき、これらの状態は角運動量 j の表現をなしているという。同様に、$2j+1$ 演算子 $\hat{O}_{j,m}$ $(m = j, \cdots, -j)$ が、交換関係

   $$\begin{aligned} [\hat{J}^3, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar m \hat{O}_{j,m} \\ [\hat{J}^+, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\hat{O}_{j,m+1} \\ [\hat{J}^-, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\hat{O}_{j,m-1} \end{aligned}$$

   を満たすとき、これらの演算子は角運動量 j をもつテンソル演算子であるという。

   (a) 2 組みの状態ベクトル $|\psi; j, m\rangle (m = j, \cdots, -j)$、$|\varphi; j', m'\rangle (m' = j', \cdots, -j')$ がそれぞれ角運動量 j、j' の表現をなしているとする。$\langle \varphi; j', m' | \psi; j, m \rangle = A_m \delta_{j',j} \delta m', m$ を示せ。

   (b) 式 (2) を用いて、A_m が m に依らないことを示せ。

   (c) $\hat{O}_{j_1,m_1} (m_1 = j_1, \cdots, -j_1)$ が角運動量 j_1 をもつテンソル演算子で、$|\psi; j_2, m_2\rangle (m_2 = j_2, \cdots, -j_2)$ が角運動量 j_2 の表現をなしているとき、$\hat{O}_{j_1,m_1}|\psi; j_2, m_2\rangle$ は $\hat{\boldsymbol{J}}$ の作用に対して、$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ のように変換することを示せ。

   (d) $|\varphi; j, m\rangle (m = j, \cdots, -j)$ が角運動量 j の表現をなしているとき、$\langle \varphi; j, m | \hat{O}_{j_1,m_1} | \psi; , j_2, m_2 \rangle = A C^{j,m}_{m_1,m_2}$ となることを示せ。ただし、A は m、m_1、m_2 には依らない数である。これを Wigner-Eckart の定理と呼ぶ。(ヒント：$|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle = \sum_{j,m} C^{j,m}_{m_1,m_2} |j, m\rangle\rangle$ は $\hat{O}_{j_1,m_1}|j_2, m_2\rangle = \sum_{j,m} C^{j,m}_{m_1,m_2} |\xi; j, m\rangle$ とよみかえることができる。)