量子力学 2 演習 No.13 (00/7/13)

1. 角運動量の固有状態とテンソル演算子について、以下の問いに答えよ。

   (a) m 選択則

   $$\langle\varphi; j_2, m_2|\hat{O}_{j,m}|\psi; j_1, m_1\rangle = 0\,, \quad m_2 \neq m + m_1$$

   を導け。

   (b) スカラー演算子 $\hat{S}$ は $[\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{S}] = 0$ を満たすから $j = 0$ のテンソル演算子であるといえる。($\hat{\boldsymbol{J}}$ は回転の生成子であることを思い出そう。) 行列要素 $\langle\varphi; j, m|\hat{S}|\psi; j, m\rangle$ が m に依存しないことを示せ。$\hat{S}$ をハミルトニアンにとった場合、これは何を意味するか。

   (c) ベクトル演算子 $\hat{\boldsymbol{V}}$ は $[\hat{J}^i, \hat{V}^j] = i\hbar\sum_{k=1}^{3}\epsilon^{ijk}\hat{V}^k$ を満たす。$\hat{\boldsymbol{V}}$ は $j = 1$ の演算子であることを確かめよ。ただし、$\hat{V}_{1,0} = \hat{V}^3$, $\hat{V}_{1,\pm1} = \mp(\hat{V}^1 \pm i\hat{V}^2)/\sqrt{2}$ とせよ。

2. Wigner-Eckart の定理を再度導こう。

   (a) まず準備として、Clebsch-Gordan 係数の漸化式を考える。j_1, m_1 の状態と j_2, m_2 の状態をかけあわせた状態を、j, m の状態で展開するときの係数が Clebsch-Gordan 係数であった。すなわち、$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle = \sum_{j,m}|j, m\rangle C^{j,m}_{m_1,m_2}$ である。両辺に $\hat{J}^{\pm} = \hat{J}^{\pm}_1 + \hat{J}^{\pm}_2$ を作用させ、左から $\langle j, m|$ をかけることにより、漸化式

   $$\begin{aligned}&\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)}\, C^{j,m}_{m_1\pm1,m_2} + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)}\, C^{j,m}_{m_2\pm1,m_2}\\ &= \sqrt{j(j+1) - m(m \mp 1)}\, C^{j,m_\mp 1}_{m_1,m_2}\end{aligned}$$

   を導け。(全体の規格化と適当な符号の約束を決めておけば、この漸化式を解くことで Clebsch-Gordan 係数を決定できる。)

   (b) No.12 の問題 3(c) でみたように、$\hat{O}_{j_1,m_1}|\psi; j_2, m_2\rangle$ は $\hat{\boldsymbol{J}}$ の作用に対して、$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ のように変換する。このことからテンソル演算子の行列要素の間に 2a と類似の漸化式が成り立つことが期待される。この漸化式を実際に導け。

   (c) 2a と 2b の漸化式を比較することにより、Wigner-Eckart の定理

   $$\langle\varphi; j, m|\hat{O}_{j_1,m_1}|\psi; j_2, m_2\rangle = AC^{j,m}_{m1,m_2}$$

   を示せ。ただし、A は m, m_1, m_2 によらない。(しばしば $A = \langle\varphi; j_2||O_j||\psi; j_1\rangle/\sqrt{2j_1+1}$ などと書かれ、$\langle\varphi; j_2||O_j||\psi; j_1\rangle$ を既約行列要素と呼ぶ。)

   (d) Wigner-Eckart の定理を用いて、行列要素 $\langle\varphi; j_2, m_2|\hat{x}|\psi; j_1, m_1\rangle$ に対する選択則を導け。$j_1 = 0$、$j_2 = 0$ は許されるか。