量子力学 2 演習　　No.8　00/6/8

1. 前回の問題で示したように、角運動量ベクトル $\mathbf{L}$ の各成分 L_x, L_y, L_z は、 $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ と交換する。これは、L_x, L_y, L_z のそれぞれが L^2 との間に同時固有状態をもつことを意味している。しかし、一方で L_x と L_y、L_y と L_z、L_z と L_x は交換せず、それらの間に一般には同時固有状態がない。これは一見矛盾しているようにみえる。このことを考えるために、具体的に L_x, L_y, L_z の固有状態をつくってみよう。

   (1) L^2 の固有状態は球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ で与えられ、対応する 固有値は $l(l+1)\hbar^2$ である。L^2 の固有状態は固有値が $l(l+1)\hbar^2$ のとき $m = -l, -l+1, \cdots, l-1, l$ に対応して $2l+1$ 重に縮重している。L_i $(i = x, y, z)$ が L^2 と交換することを使って $L_i Y_l^m(\theta, \varphi)$ が L^2 の固有状態であることを示し、対応する固有値を求めよ。

   (2) $l = 0$ の場合を考えよう。このときは、L^2 の固有状態に縮重はない。(1) の結果を使って、$Y_0^0(\theta, \varphi)$ が L_i の固有状態でもあることを示せ。

   (3) $l = 1$ の場合を考えよう。このときは、L^2 の固有状態は 3 重に縮重している。このとき、ベクトル $L_i Y$ と Y を

   $$L_i Y = \begin{pmatrix} L_i Y_1^{-1}(\theta, \varphi) \\ L_i Y_1^0(\theta, \varphi) \\ L_i Y_1^1(\theta, \varphi) \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} Y_1^{-1}(\theta, \varphi) \\ Y_1^0(\theta, \varphi) \\ Y_1^1(\theta, \varphi) \end{pmatrix}$$

   で定義する。(1) の結果から、適当な 3×3 行列 A を使って $L_i Y = AY$ と書けることを示せ。

   (4) 行列 A の転置行列を A^T とし、その固有ベクトルを $(c_1, c_2, c_3)^T$、対応する固有値を α とする (T は転置を意味する)。ベクトル (c_1, c_2, c_3) を $L_i Y = AY$ の両辺に左からかけることにより、 $c_1 Y_1^{-1}(\theta, \varphi) + c_2 Y_1^0(\theta, \varphi) + c_3 Y_1^1(\theta, \varphi)$ が L_i の固有状態で、固有値が α になることを示せ。

   (5) $l = 1$ で $i = x, y, z$ のときに具体的に 行列 A を求め、A^T の固有ベクトルと固有値を計算せよ。

   (6) 問題の最初に述べた矛盾がどのように解決されたか述べよ。

2. L^2 と L_z が交換することから、L^2 と L_z には同時固有関数 $|\alpha, \beta>$ が存在し、

   $$\begin{aligned} L^2|\alpha, \beta> &= \alpha|\alpha, \beta>, \\ L_z|\alpha, \beta> &= \beta|\alpha, \beta> \end{aligned}$$

   を満たす。この同時固有関数は球面調和関数で与えられるが、その極座標表示を以下の手順で導いてみよう。

   (1) $L_+ = L_x + iL_y$, $L_- = L_x - iL_y$ に対し、交換関係 $[L_z, L_+]$, $[L_z, L_-]$ を計算せよ。

   (2) (1) の結果を使って、$L_+|\alpha, \beta>$, $L_-|\alpha, \beta>$ は L_z の固有関数であることを示し、固有値を求めよ。

   (3) $|\alpha, \beta>$ が演算子 $L_- L_+$ の固有関数でもあることを示し、その固有値を求めよ。さらに、その固有値が非負であることを示せ。

   (4) α の値が固定されているとしよう。このとき、β の値は制限されており、最大値 β' と最小値 β'' があることを示せ。

   (5) (2) および (4) の結果から、

   $$L_+|\alpha, \beta'>= 0, \quad L_-|\alpha, \beta''>= 0$$

   であることを示せ。

   (6) (5) で導いた式は、L_+ と L_- の極座標表示を代入すると微分方程式になる。その微分方程式を解いて $|\alpha, \beta'>$ と $|\alpha, \beta''>$ の極座標表示を求めよ。

3. 3 次元の調和振動子の Schrödinger 方程式

   $$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \right\} \Psi(x, y, z) = E\Psi(x, y, z)$$

   を考える。以下の問いに答えよ。

   (1) 極座標を用いて、波動関数を $\Psi = \frac{\chi(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi)$ と書く。このとき、$\chi(r)$ が満たす微分方程式を求めよ。

   (2) (1) で求めた微分方程式を、変数 $\xi = r^2$ を使って書き直せ。

   (3) $\chi = \mathrm{e}^{-(m\omega/2\hbar)\xi} \xi^{(l+1)/2} v(\xi)$ とおき、$v(\xi)$ の満たす微分方程式を求めよ。

   (4) $v(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^k$ とおき、(3) で求めた微分方程式に代入せよ。その結果から、係数 c_k の間に成立する漸化式を求めよ。

   (5) $v(\xi)$ が多項式になるように エネルギー E の値を定めよ。