量子力学 2 演習　　レポート問題 No.2　00/7/13

(提出期限:9 月 13 日午後 5 時. 提出場所は F632.)

1. Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

について次の式を示せ。

(a) 反交換関係

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}$$

(b) 交換関係

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

(c)

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

(d)

$$\exp\left(-\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\phi\right) = \cos\frac{\phi}{2} - i\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\sin\frac{\phi}{2}$$

ただし、$\boldsymbol{n}^2 = 1$。(級数展開し、前問で $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ として得られる式を用いよ。)

2. スピン $1/2$ の粒子 (軌道角運動量なし) の $J_z = \pm\hbar/2$ の状態をそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と列ベクトルで表す。これらはそれぞれスピンが z 軸の正の方向 $(0,0,1)$ を向いた状態と負の方向 $(0,0,-1)$ を向いた状態になっている。この 2 つの状態の線形結合でスピンがベクトル $(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ の方向を向いた状態を表せ。(単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ のまわりの角度 α の回転を表す演算子は $\exp(-i\hat{\boldsymbol{J}}\cdot\boldsymbol{n}\alpha/\hbar)$ であり、$j = 1/2$ のとき、No.12 の問題 1 でみたように、$\hat{J}_i = \hbar\sigma_i/2$ と表されること用いよ。)

3. 角運動量の理論によれば、球対称ポテンシャル中の粒子のエネルギー固有状態は、$\boldsymbol{L}^2 = \hbar^2 l(l+1)$ のとき、磁気量子数 m の $2l+1$ 個 $(-l, \cdots, l)$ の値について縮退している。ところが水素原子 (Coulomb 場中での運動) では、主量子数 n を与えると l は $0, 1, \cdots, n-1$ の n 個の値をとることができ、l の値によらずエネルギー固有値は $E = -E_0/(2n^2)$ $(E_0 = me^4/\hbar^2)$ となる。すなわち、上で述べた m の縮退のほかに l にも縮退があることになる。この縮退の理由を考えよう。

(a) ハミルトニアンを $H = \boldsymbol{p}^2/(2m) - e^2/r$ とするとベクトル

$$\boldsymbol{A} = -e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{m}\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}$$

が保存量であることを、古典的に確かめよ。(運動方程式を用いて時間微分がゼロであることを示せばよい。)

(b) 量子論では $\boldsymbol{A}$ に対応するエルミート演算子として

$$\hat{\boldsymbol{A}} = -e^2\frac{\boldsymbol{r}}{r} + \frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}}\times\hat{\boldsymbol{L}} - \hat{\boldsymbol{L}}\times\hat{\boldsymbol{p}})$$

を考えればよいだろう。$\hat{\boldsymbol{A}}$ がハミルトニアン $\hat{H} = \hat{\boldsymbol{p}}^2/(2m) - e^2/r$ と可換であることを示せ。

(c) 次の交換関係を示せ。

$$[\hat{L}_i, \hat{A}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{A}_k\,, \quad [\hat{A}_i, \hat{A}_j] = -\frac{2}{m}i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{H}\hat{L}_k$$

(前半はほぼ自明である。) すなわち、$\hat{\boldsymbol{A}}$ という他の保存量と可換でない新たな保存量が存在することが分った。これが上述の縮退の理由である。以下ではこのことをさらに具体的に確めよう。

(d) 負のエネルギー E を持つ状態を考えることにすると、上の交換関係で $\hat{H}$ を E で置き換えてよい。$\hat{\boldsymbol{L}} = \hbar\hat{\boldsymbol{l}}$、$\hat{\boldsymbol{A}} = \hbar\sqrt{-2E/m}\,\hat{\boldsymbol{u}}$ で演算子 $\hat{\boldsymbol{l}}$、$\hat{\boldsymbol{u}}$ を導入すると

$$[\hat{l}_i, \hat{l}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{l}_k\,, \quad [\hat{l}_i, \hat{u}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{u}_k\,, \quad [\hat{u}_i, \hat{u}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{l}_k$$

となることを示せ。これは $\hat{l}_i, \hat{u}_i$ が 4 次元空間の回転の生成子であることを表していて、これが系の持つ対称性である。

(e) $\hat{\boldsymbol{j}}_1 = (\hat{\boldsymbol{l}} + \hat{\boldsymbol{u}})/2$、$\hat{\boldsymbol{j}}_2 = (\hat{\boldsymbol{l}} - \hat{\boldsymbol{u}})/2$ とすると、

$$[\hat{j}_{1i}, \hat{j}_{1j}] = i\epsilon_{ijk}\hat{j}_{1k}\,, \quad [\hat{j}_{2i}, \hat{j}_{2j}] = i\epsilon_{ijk}\hat{j}_{2k}\,, \quad [\hat{j}_{1i}, \hat{j}_{2j}] = 0$$

であることを示せ。すなわち、前問の交換関係は 2 つの独立な角運動量 (3 次元回転の生成子) の交換関係と同等である。

(f) $\hat{\boldsymbol{l}}\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{u}}\cdot\hat{\boldsymbol{l}} = 0$ を示し、

$$\hat{\boldsymbol{j}}_1^2 = \hat{\boldsymbol{j}}_2^2 = \frac{1}{4}(\hat{\boldsymbol{l}}^2 + \hat{\boldsymbol{u}}^2) = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{E_0}{2E}\right)$$

を導け。(適宜 $\hat{H}$ を E で置き換えよ。)

(g) $\hat{\boldsymbol{j}}_1^2 = \hat{\boldsymbol{j}}_2^2 = j(j+1)$ $(j = 0, 1/2, 1, \cdots)$ とおき、$E = -E_0/(2n^2)$ となることを示せ。ここで $n = 2j + 1 = 1, 2, 3\cdots$ である。

(h) エネルギー固有値 $E = -E_0/(2n^2)$ の状態の縮退度を求めよ。(j_{1z} についての縮退度と j_{2z} についての縮退度からただちに求まる。)

(i) $\hat{\boldsymbol{l}} = \hat{\boldsymbol{j}}_1 + \hat{\boldsymbol{j}}_2$ を用いて l のとる範囲が 0 から $n-1$ であることを示せ。