量子力学 2 演習　　No.5　01/5/31

1. 正準交換関係をみたす演算子 $\hat{q}$, $\hat{p}$ について考える。すなわち、$[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$ である。

   (a) ユニタリー演算子
   $$\hat{U}(a) = \exp(a\hat{p}), \quad \text{ただし } a \text{ は実数},$$
   が $\hat{U}(a)\hat{U}(b) = \hat{U}(a+b)$ および $\hat{U}(a)^{-1}\hat{q}\hat{U}(a) = \hat{q} + a$ をみたすことを示せ。

   (b) 前問の結果は $\hat{U}(a)$ が移動量 a の平行移動 (並進) 演算子であることを示している。$\hat{U}(a)$ を位置の固有ベクトル $|q\rangle$ に作用させ、$\hat{U}(a)|q\rangle = |q+a\rangle$ であることを確かめよ。

   (c) $\hat{U}(a)|q\rangle = |q+a\rangle$ の両辺を a について展開することにより、$\hat{p}$ が $|q\rangle$ にどのように作用するか決定せよ。

   (d) $\langle q|\hat{q}|\psi\rangle$ および $\langle q|\hat{p}|\psi\rangle$ を計算することにより、座標表示の波動関数 $\langle q|\psi\rangle = \psi(q)$ に対する $\hat{q}$ および $\hat{p}$ の表示を求めよ。

   (e) $|q\rangle$ の完備性を用いて次の式を示せ。$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int dq\, \psi_1(q)^*\psi_2(q)$

   (f) $\hat{q}|p\rangle$ はどう書けるか。

2. 不確定性関係について考える。

   (a) $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$ (Schwarz の不等式) を導け。

   (b) あるエルミート演算子 A に対して、$\Delta A = A - \langle A\rangle$ という演算子を定義する。ここで $\langle A\rangle$ はいま考えている状態 (必要なときは $|\rangle$ と書くことにする) についての期待値を表す。$|\alpha\rangle = \Delta A|\rangle$、$|\beta\rangle = \Delta B|\rangle$ と考え、前問の結果を用いて $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2$ を示せ。

   (c) $\Delta A\Delta B = \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\}$ を示せ。ただし、$\{\quad,\quad\}$ は反交換子を表す。

   (d) 以上の結果を用いて不確定性関係 $\langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\langle[A,B]\rangle|^2/4$ を導け。

   (e) 上の式で等号が成り立つのは、$\Delta A|\rangle = \lambda\Delta B|\rangle$ で、λ が純虚数の場合であることを示せ。

   (f) $\hat{q}$ と $\hat{p}$ の不確定性関係を導け。

3. 状態ベクトルは Schrödinger 方程式
   $$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_S = \hat{H}|\psi(t)\rangle_S$$
   にしたがって時間発展し、演算子自身は時間発展せずにその期待値が状態ベクトルの時間発展によって、$\bar{O}(t) =_S \langle\psi(t)|\hat{O}_S|\psi(t)\rangle_S$ と時間とともに変化するような見方を Schrödinger 描像と呼ぶ。一方、状態ベクトルは時間に依存せず演算子が時間発展するような見方も可能でこれを Heisenberg 描像と呼ぶ。以下では簡単のため $\hat{H}$、$\hat{O}_S$ は陽には時間に依存しないとする。

   (a) Heisenberg 描像での時間に依存しない状態ベクトルを $|\psi\rangle_H = |\psi(0)\rangle_S$ と定義する。$\bar{O}(t)$ が見方 (描像) に依らないこと、すなわち $\bar{O}(t) =_H \langle\psi|\hat{O}_H(t)|\psi\rangle_H$ と書けることを用いて、$\hat{O}_H(t)$ と $\hat{O}_S$ の関係を求めよ。

   (b) 前問の結果を t で微分して、$\hat{O}_H(t)$ の時間発展を決定する微分方程式 (Heisenberg 方程式) を導け。

   (c) $\hat{q}$、$\hat{p}$ に対する Heisenberg 方程式を求め、それらが古典的な正準方程式と同じ形になることを示せ。ただし、$\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + V(\hat{q})$ とする。

   (d) 前問で見たように、$\frac{1}{i\hbar}[\quad,\quad] \to \{\quad,\quad\}$ と交換子を Poisson 括弧で置き換え、$\hat{q} \to q$、$\hat{p} \to p$ と置き換えると Heisenberg 方程式は古典的な運動方程式に対応していることが分かる。この交換子と Poisson 括弧の類似性は、
   $$\left(\frac{1}{i\hbar}[\hat{O}_1,\hat{O}_2]\right)_{\rm cl} = \Big\{(\hat{O}_1)_{\rm cl}, (\hat{O}_2)_{\rm cl}\Big\}$$
   と一般化できる。ただし、$\hat{q}$、$\hat{p}$ で書けていて $\hbar$ に陽に依存していない演算子を考え、$(\hat{O})_{\rm cl}$ は $\hat{O}$ に対して $\hat{q} \to q$、$\hat{p} \to p$ という置き換えを行ったものとする。$\hat{O}_1 = U(\hat{q})$, $\hat{O}_2 = \hat{H}$ として上の式を確かめよ。ただし、U は任意関数、ハミルトニアンは前問と同じとする。