量子力学 2 演習 No.7 (01/6/14)

1. 3 準位系のハミルトニアン行列

$$\begin{pmatrix} E_1^{(0)} & 0 & \lambda a \\ 0 & E_1^{(0)} & \lambda b \\ \lambda a^* & \lambda b^* & E_2^{(0)} \end{pmatrix}$$

を考える (λ は実数)。摂動のない問題 ($\lambda = 0$) に対するエネルギー固有値に縮退があることに注意して以下の問いに答えよ。

   (a) ハミルトニアンを厳密に対角化し、エネルギー固有値 E_1, E_2, E_3 を求めよ。

   (b) $\lambda^2(|a|^2 + |b|^2) \ll |E_1^{(0)} - E_2^{(0)}|^2$ を仮定して、同じ問題を摂動論を用いて解き、エネルギー固有値を 2 次まで求めよ。

   (c) 1b の結果を 1a で求めた厳密な結果と比較せよ。

2. クーロンポテンシャルで記述される水素原子を考える。

   (a) 主量子数 $n = 2$ の状態の縮退の様子を示せ。

   (b) この系に一様な z 方向の電場 E をかけるとポテンシャルとして $V_E = -ezE$ がハミルトニアンに付け加わる。$n = 2$ の状態の空間での V_E の行列要素を求めよ。

   (c) V_E による摂動でどのように $n = 2$ の状態の縮退がとけるか示せ。(Stark 効果)

   (d) 実際の水素原子では $2s$、$2p$ の状態はクーロンポテンシャル以外の効果により縮退していない。上の計算はどのようなときに適用できるか。

3. ハミルトニアンが

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

で与えられる 2 次元の等方調和振動子を考える。

   (a) 低い方から 3 番目までの状態のエネルギーを求めよ。縮退は存在するか。

   (b) 次に摂動 $V = \delta m\omega^2 xy$ をかけたとする。ただしここで δ は 1 よりずっと小さい無次元の実数とする。上で求めた 3 つの状態のそれぞれに対して、摂動の 1 次の補正を加えたエネルギーを求めよ。

   (c) ハミルトニアンが $H_0 + V$ で与えられる系は実は厳密に解ける。上の 3 つの状態に対応する厳密なエネルギー固有値を求め、上の結果と比較せよ。(ヒント：全ハミルトニアンは x と y の入れかえに対して不変である。)