量子力学 2 演習 No.8 (01/6/28)

1. ハミルトニアンが $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$ で与えられる系を考える。($\hat{H}_0$ は時間に依らないとする。) Schrödinger 表示での状態を $|\psi(t)\rangle_S$ と書き、相互作用表示の状態を $|\psi(t)\rangle_S = \exp\left(\hat{H}_0 t/(i\hbar)\right)|\psi(t)\rangle_I$ で定義する。

   (a) 物理量 O の Schrödinger 表示での演算子を $\hat{O}_S$ と書くと、O の期待値は $\bar{O} = {}_S\langle\psi(t)|\hat{O}_S|\psi(t)\rangle_S$ である。$\bar{O}$ が表示に依らないことを用いて、相互作用表示での演算子 $\hat{O}_I$ と $\hat{O}_S$ の関係を求めよ。

   (b) $\hat{O}_I$ の時間発展を決定する方程式を導け。($\hat{O}_S$ は時間に依らないとする。)

   (c) $|\psi(t)\rangle_I$ の時間発展を決定する方程式を導け。

   (d) $|\varphi_n^{(0)}\rangle$ を $\hat{H}_0$ の固有値 $E_n^{(0)}$ の固有状態として $|\psi(t)\rangle_I = \sum_n c_n(t)|\varphi_n^{(0)}\rangle$ と展開する。$c_n(t)$ の満す方程式を導け。

   (e) この式から

   $$c_n(t) = c_n(t_0) + \sum_m \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' V_{nm}(t')c_m(t_0) + \sum_{m,k}\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V_{nk}(t')V_{km}(t'')c_m(t_0) + \cdots$$

   となることを示せ。ただし、

   $$V_{nm}(t) \equiv \langle\varphi_n^{(0)}|\hat{V}_I(t)|\varphi_m^{(0)}\rangle = \exp\left\{\frac{(E_m^{(0)} - E_n^{(0)})t}{i\hbar}\right\}\langle\varphi_n^{(0)}|\hat{V}(t)|\varphi_m^{(0)}\rangle$$

   である。

2. $E_1 < E_2$ の 2 準位系を考える。2 準位系を結ぶ時間に依存する次のようなポテンシャルがある。

   $$V_{11} = V_{22} = 0, \quad V_{12} = V_{21}^* = \gamma e^{i\omega t}, \quad (\gamma, \omega\text{は実数。})$$

   時刻 $t = 0$ で状態は下の準位にあった。すなわち、状態を $|\psi(t)\rangle_I = (c_1(t), c_2(t))^T$ と書けば $c_1(0) = 1,\ c_2(0) = 0$ である。

   (a) 1e の式を用いて V の 1 次で $c_1(t), c_2(t)$ を求めよ。

   (b) $c_1(t), c_2(t)$ を厳密に求め上の結果と比較せよ。(ω が $\omega_{21} \equiv (E_2 - E_1)/\hbar$ に近い場合に注意。)

3. 1 次元調和振動子が、$t < 0$ で基底状態にあった。$t \geq 0$ で、この系に時間依存性はあるが空間的には一様な力 (ポテンシャルではない) $F = F_0 e^{-t/\tau}$ が x 方向にかかった。

   (a) 時間を含む 1 次の摂動論を用い、$t > 0$ での振動子が第 1 励起状態に見出される確率を求めよ。t が τ に比べて十分に大きいとき、この結果は時間によらない事を示せ。

   (b) 第 n 励起状態に見出される確率を結果がゼロとならない最低次の摂動で求めよ。$t \gg \tau$ でどうなるか。

http://www-het.phys.sci.osaka-u.ac.jp/tanaka/enshuu.html