量子力学 2 演習　　No.12　97/7/10

1. 前回見たように、角運動量演算子を交換関係

$$[\hat{J}^a, \hat{J}^b] = i\hbar \sum_{c=1}^{3} \epsilon^{abc} \hat{J}^c \tag{1}$$

を満たすものとして定義すると、角運動量の大きさ J ($\boldsymbol{J}^2$の固有値が $J(J+\hbar)$) は、$J = \hbar n/2$ (ただし、n はゼロまたは正の整数) となる。すなわち、角運動量の大きさは ($\hbar$ を単位として) 整数か半整数の値をとり得る。

(a) 角運動量の大きさが $J = \hbar j$ で、$\hat{J}^3$の固有値が$\hbar m$ であるような状態を $|j, m\rangle$ と書くことにする。z 軸のまわりに 1 回転すると $|j, m\rangle$ はどのように変換するか。j が整数の場合と半整数の場合に分けて答えよ。
(ヒント：有限回転の演算子は $\exp\left(\frac{1}{i\hbar}\boldsymbol{\theta}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\right)$。)

(b) 状態 $|\psi\rangle$ の位置の固有ケット $|\boldsymbol{r}\rangle$ による展開が一意的であるとすると、波動関数$\psi(\boldsymbol{r})$ は一価であることを示せ。

(c) ここまでの結果は、量子力学的な系には座標以外にも何か系を特徴付ける変数があり得ることを示唆している。すなわち、角運動量の演算子$\hat{\boldsymbol{J}}$は軌道角運動量$\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ だけでは一般的に記述できない。そこで、スピン角運動量と呼ばれるものを導入し、その演算子を$\hat{\boldsymbol{S}}$と書こう。これはある粒子の固有の角運動量に対応する。$\hat{\boldsymbol{S}}$は座標および運動量の演算子と可換で、交換関係 $[\hat{S}^a, \hat{S}^b] = i\hbar \sum_{c=1}^{3} \epsilon^{abc} \hat{S}^c$ を満たす。全角運動量を$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}$とすると、$\hat{\boldsymbol{J}}$は式 (1) を満たすことを示せ。

2. 二つの独立な系をあわせることを考える。それぞれの角運動量演算子は$\hat{\boldsymbol{J}}_1$、$\hat{\boldsymbol{J}}_2$で、互いに交換し、それぞれ式 (1) を満たす。あわせた系全体の角運動量演算子は$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}_1 + \hat{\boldsymbol{J}}_2$ と書ける。それぞれの系の状態を $|j_1, m_1\rangle$、$|j_2, m_2\rangle$ とすると、あわせた系の状態は $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ と書ける。この状態に対して、$\hat{\boldsymbol{J}}$は$\hat{\boldsymbol{J}}|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle = \hat{\boldsymbol{J}}_1|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle + |j_1, m_1\rangle\hat{\boldsymbol{J}}_2|j_2, m_2\rangle$ と作用する。

(a) j_1、j_2が固定されているとき、状態の数は何個か。

(b) $\hat{J}^3/\hbar$ の固有値 m のとり得る値が $j_1 + j_2$から$-(j_1 + j_2)$ の整数であることを示し、それぞれの m の値に属する状態の数 (多重度) を調べよ。

(c) m の最大値に対応する状態 $|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle$ が$\hat{\boldsymbol{J}}^2$の固有状態であることを示し、その固有値が$\hbar^2(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)$ であることを示せ。(ヒント：$\hat{J}^+|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle$ を評価し、$\hat{\boldsymbol{J}}^2 = \hat{J}^3(\hat{J}^3 + \hbar) + \hat{J}^-\hat{J}^+$ を用いよ。)

(d) 前問の結果より、$|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle$ に$\hat{J}^-$を順次作用させて、$\hat{\boldsymbol{J}}^2/\hbar^2$ が $(j_1+j_2)(j_1+j_2+1)$ で$\hat{J}^3/\hbar$ が $j_1+j_2, \cdots, -(j_1+j_2)$ の状態を得ることができる。これらの状態を除いた残りの状態 (すなわち、これらの状態と直交するすべての独立な状態) について、m のとり得る値とそれぞれの m の値に属する状態の数 (多重度) を調べよ。

(e) 2c 以下の議論を繰り返して、$\hat{\boldsymbol{J}}^2$の固有値を$\hbar^2 j(j+1)$ と書いたときの j のとり得る値とその多重度を調べよ。(例えば、$j = j_1 + j_2$が可能でその多重度は 1 である。) また、j と m で指定される状態の数の総和が 2a で求めた状態の数に等しいことを示せ。

(f) 結局、あわせた系の状態は$\hat{\boldsymbol{J}}^2$と$\hat{J}^3$の固有値で一意的に表されることが分かったので、それらを $|j, m\rangle\rangle$ と書くことにする。$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ を $|j, m\rangle\rangle$ で展開したときの係数 (Clebsch-Goldan 係数) を $C^{j,m}_{m1,m2} = \langle\langle j, m|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ と書く。$j_1 = j_2 = 1/2$ のとき、上の角運動量の合成を実際に行って、すべてのゼロでない Clebsch-Goldan 係数を求めよ。

3. $2j + 1$ 個の状態ベクトル $|j, m\rangle$ $(m = j, \cdots, -j)$ が$\hat{\boldsymbol{J}}$の作用に対して、

$$\begin{aligned}
\hat{J}^3|j, m\rangle &= \hbar m|j, m\rangle \\
\hat{J}^+|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|j, m+1\rangle \\
\hat{J}^-|j, m\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|j, m-1\rangle
\end{aligned} \tag{2}$$

と変換するとき、これらの状態は角運動量 j の表現をなしているという。同様に、$2j+1$ 演算子$\hat{O}_{j,m}$ $(m = j, \cdots, -j)$ が、交換関係

$$\begin{aligned}
[\hat{J}^3, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar m\hat{O}_{j,m} \\
[\hat{J}^+, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,\hat{O}_{j,m+1} \\
[\hat{J}^-, \hat{O}_{j,m}] &= \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,\hat{O}_{j,m-1}
\end{aligned}$$

を満たすとき、これらの演算子は角運動量 j をもつテンソル演算子であるという。

(a) 2 組みの状態ベクトル $|\psi; j, m\rangle(m = j, \cdots, -j)$、$|\varphi; j', m'\rangle(m' = j', \cdots, -j')$ がそれぞれ角運動量 j、j'の表現をなしているとする。$\langle\varphi; j', m'|\psi; j, m\rangle = A_m\delta_{j',j}\delta m', m$ を示せ。

(b) 式 (2) を用いて、A_mが m に依らないことを示せ。

(c) $\hat{O}_{j_1,m_1}(m_1 = j_1, \cdots, -j_1)$ が角運動量 j_1をもつテンソル演算子で、$|\psi; j_2, m_2\rangle(m_2 = j_2, \cdots, -j_2)$ が角運動量 j_2の表現をなしているとき、$\hat{O}_{j_1,m_1}|\psi; j_2, m_2\rangle$ は$\hat{\boldsymbol{J}}$の作用に対して、$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ のように変換することを示せ。

(d) $|\varphi; j, m\rangle(m = j, \cdots, -j)$ が角運動量 j の表現をなしているとき、$\langle\varphi; j, m|\hat{O}_{j_1,m_1}|\psi; , j_2, m_2\rangle = AC^{j,m}_{m_1,m_2}$ となることを示せ。ただし、A は m、m_1、m_2には依らない数である。これを Wigner-Eckart の定理と呼ぶ。(ヒント：$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle = \sum_{j,m} C^{j,m}_{m_1,m_2}|j, m\rangle\rangle$ は$\hat{O}_{j_1,m_1}|j_2, m_2\rangle = \sum_{j,m} C^{j,m}_{m_1,m_2}|\xi; j, m\rangle$ とよみかえることができる。)