量子力学2演習　　No.4　97/5/15

1. 質量が m_1、m_2、位置が$\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_2$で、ポテンシャルが $V(|\boldsymbol{r}|)$, (ただし$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$) で与えられるような 2 つの粒子からなる量子系を考える。
   (a) 重心座標 $\boldsymbol{R} \equiv (m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2)/(m_1 + m_2)$ と相対座標$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}$に対応する運動量演算子 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{p}$、および換算質量 $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ を導入して、ハミルトニアンを表せ。
   (b) 重心運動と相対運動を記述する Schrödinger 方程式を導け。
2. 質量が m_1、m_2、電荷 Z_1e、$-Z_2e$ であるような 2 粒子の束縛状態について考える。
   (a) 1 の結果を用いて相対運動を記述する方程式を導け。
   (b) 上で得られた方程式を極座標で変数分離すると角度部分の解は球面調和関数 $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ で与えられる。動径方程式を導け。
   (c) この動径方程式を無次元の変数$\rho = \sqrt{8\mu|E|/\hbar^2}\, r$ と$\lambda = Z_1Z_2e^2\hbar^{-1}\{\mu/(2|E|)\}^{1/2}$を用いて表せ。
   (d) $\rho \to \infty$ での、動径波動関数のふるまいが $R_\ell \sim e^{-\rho/2}$であることを示せ。
   (e) No.2 の問 2 で議論したように$\rho \to 0$ で $R_\ell \sim \rho^\ell$とふるまうことを考慮して、$R_\ell = e^{-\rho/2}\rho^\ell L(\rho)$ と置く。$L(\rho)$ の満たす方程式を導け。
   (f) $L(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\rho^k$として、$a_k$の漸化式を導け。
   (g) 束縛状態であることから$\lambda = n \equiv n_r + \ell + 1$ でなければならないことを示せ。ただし、n_r は $L(\rho)$ の次数。
   (h) 主量子数 n に対するエネルギー固有値 E_nを$\alpha \equiv e^2/(c\hbar)$ で表せ。
   (i) 水素原子の基底状態の束縛エネルギーを求めよ。ただし、$\alpha \simeq 1/137$ とせよ。
   (j) 1 つのエネルギー準位 E_nに縮退している状態の数を求めよ。
3. 次の微分方程式を Laguerre の陪方程式という。

$$\rho\frac{d^2L_n^k}{d\rho^2} + (k + 1 - \rho)\frac{dL_n^k}{d\rho} + nL_n^k = 0.$$

   多項式解 $L_n^k(\rho)$ を Laguerre の陪多項式とよび、

$$L_n^k(\rho) = \frac{e^\rho\rho^{-k}}{n!}\frac{d^n}{d\rho^n}(e^{-\rho}\rho^{n+k})$$

   と書ける。
   (a) L を L_n^kで表せ。
   (b) 主量子数 n、軌道角運動量量子数 ℓに対応する規格化された動径波動関数 $R_{n\ell}(r)$ を Laguerre の陪多項式を用いて表せ。ただし、

$$\int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{k+1}\{L_n^k(\rho)\}^2 d\rho = \frac{(n + k)!}{n!}(2n + k + 1)$$

   である。
   (c) $n = 1, 2$ の場合について、動径波動関数 $R_{n\ell}(r)$ を $a_0 = \hbar^2/(Z_1Z_2\mu e^2)$ を用いて表せ。
   (d) $n_r = 0$ のとき、動径確率密度 $r^2\{R_{n\ell}(r)\}^2$が最大になる r の値を求めよ。