量子力学 3 演習 (田中担当クラス) 問題 No.10 (2002/12/5)

1. 光学定理について Born 近似で考察しよう。

   (a) No.9 の問題 1(a) で求めた (1 次の)Born 近似の散乱振幅は自明な形で光学定理を満していることを確かめよ、

   (b) No.9 の問題 1(a) の逐次近似を繰り返すことにより V の 2 次までで散乱振幅を求め (2 次の Born 近似)、光学定理がどのように満されているか調べよ。

   (c) ポテンシャルが球対称のとき、散乱断面積が

   $$\sigma = \frac{1}{4\pi k^2}\int d^3r \int d^3r' \frac{\sin^2 k|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|^2} U(r)U(r')$$

   と表されることを示せ。

2. 球対称ポテンシャルによる散乱を考える。z 軸方向に平面波が入射している。

   (a) 極座標で変数分離すれば Schrödinger 方程式の解は $\psi = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell P_\ell(\cos\theta) R_{k\ell}(r)$ と書けることを確かめよ。

   (b) 動径関数の満す方程式は

   $$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR_{k\ell}) + \left\{k^2 - U(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\} R_{k\ell} = 0$$

   となる。ただし、$k^2 = 2mE/\hbar^2$、$U(r) = 2mV(r)/\hbar^2$ である。$V = 0$ のとき、$R_{k\ell}(r) = 2kj_\ell(kr)$ となることを示せ。(規格化については下を見よ。)

   (c) 上の結果を用いて $e^{ikz} = \sum_\ell i^\ell (2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta)$ を示せ。

   (d) V の到達範囲が有限のとき、遠方で

   $$R_{k\ell}(r) \approx \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)$$

   と書けることを示せ。(規格化は $\int R_{kl}(r)R_{k'l}(r)r^2dr = 2\pi\delta(k-k')$ とせよ。)

   (e) 遠方で

   $$\psi \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r}e^{ikr}$$

   となるように A_ℓ を決定せよ。さらに、

   $$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_\ell (2\ell+1)(S_\ell - 1)P_\ell(\cos\theta)$$

   となることを示せ。ただし、$S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ である。(これを部分波展開と呼ぶ。)

   (f) 部分波展開の式を用いて光学定理を証明せよ。

   (g) $f_l = (S_l - 1)/(2ik)$ を部分波振幅と呼ぶ。kf_l の取り得る値を複素平面上に図示せよ。

3. 位相のずれ δ_ℓ を Born 近似で計算する表式を求めよう。

   (a) $\chi = rR_{k\ell}$ の満す微分方程式を書け。

(b) $\chi^{(0)}$ を $V=0$ のときの解とすると

$$\chi'(r)\chi^{(0)}(r)-\chi(r)\chi^{(0)\prime}(r)=\int_0^r U\chi\chi^{(0)}dr'$$

となることを示せ。

(c) Born 近似ではこの式の右辺で $\chi\simeq\chi^{(0)}$ と置くことができる。さらに、$r\to\infty$ として

$$\delta_\ell\simeq -k\int_0^\infty U(r)j_\ell^2(kr)r^2dr$$

を導け。

(d) この結果を用いて、ポテンシャルの到達距離を a として、$ka\ll 1$(低エネルギー) のとき、$\delta_l\sim k^{2l+1}$ となることを示せ。すなわち、低エネルギーでは s 波散乱 $(l=0)$ が重要となる。

(e) ポテンシャル $V(r)=-V_0\,(r<a), V(r)=0\,(r>a)$ について、$ka\ll 1$ として、上の結果を用いて δ_l を計算し、全断面積を求め、No.9 の問題 2 と比較せよ。