量子力学 3 演習 (田中担当クラス) 問題 No.11 (2002/12/12)

1. 半径 R の剛体球による散乱を考える。ポテンシャルは $V(r) = \infty$ $(r < R)$, $V(r) = 0$ $(r > R)$ である。

   (a) $r > R$ での動径波動関数は、$R_{kl}(r) = \alpha_l j_l(kr) + \beta_l n_l(kr)$ と書ける。(No.9 問題 2 参照。) $\tan\delta_l = -\beta_l/\alpha_l$ となることを示せ。

   (b) $r < R$ では $R_{kl}(r) = 0$ である。この解と上の $r > R$ での解を $r = R$ で接続することにより、$\tan\delta_l = j_l(kR)/n_l(kR)$ となることを示せ。

   (c) $kR \ll 1$(すなわち低エネルギー) で

   $$\tan\delta_l \simeq \delta_l \simeq -\left(\frac{2^l l!}{(2l)!}\right)^2 \frac{(kR)^{2l+1}}{2l+1}$$

   となることを示せ。

   (d) $a \equiv -\lim_{k\to 0}\delta_0/k$ を散乱長という。これを求めよ。

   (e) $kR \ll 1$ での断面積を求めよ。

   (f) $kR \gg 1$ のとき、$\delta_{l+1} - \delta_l \simeq -\pi/2$ を示せ。

   (g) $kR \gg 1$ のとき、$l \lesssim kR$ の部分波が散乱に寄与すると考えられる。また、上の結果から、$\sin^2\delta_l + \sin^2\delta_{l+1} \simeq 1$ であるから、各部分波断面積において $\sin^2\delta_l \simeq 1/2$ と近似できる。これを用いて、$kR \gg 1$(すなわち高エネルギー) での断面積を求めよ。

2. ポテンシャル $V(r) = -V_0$ $(r < R,\ V_0 > 0)$, $V(r) = 0$ $(r > R)$ による散乱について考える。

   (a) $r > R$ での解は上の剛体球の場合と同じである。$r < R$ での解は $R_{kl}(r) = C_l j_l(\kappa r)$ と書ける。ただし、$\kappa \equiv \sqrt{k^2 + 2mV_0/\hbar^2}$ である。これらの解を $r = R$ で接続することにより、

   $$\tan\delta_l = \frac{kj_l'(kR) - \gamma_l j_l(kR)}{kn_l'(kR) - \gamma_l n_l(kR)}, \quad \gamma_l \equiv \frac{\kappa j_l'(\kappa R)}{j_l(\kappa R)}$$

   であることを示せ。

   (b) $kR \ll 1$ で

   $$\tan\delta_l \simeq \left(\frac{2^l l!}{(2l)!}\right)^2 \frac{l - \gamma_l R}{l + 1 + \gamma_l R}\frac{(kR)^{2l+1}}{2l+1} \tag{1}$$

   となることを示せ。

   (c) $1 + \gamma_0 R \neq 1$ として散乱長を求め、$k \to 0$ で $\sigma = 4\pi R^2(1 - \tan\kappa_0 R/\kappa_0 R)^2$ となることを示せ。ただし、$\kappa_0 = \sqrt{2mV_0}/\hbar$ である。

   (d) 部分波断面積 $\sigma_l = (4\pi/k^2)(2l+1)\sin^2\delta_l$ は、$\sin^2\delta_l = 1$、すなわち $\delta_l = (n + 1/2)\pi$ のとき、最大になる。これを共鳴散乱という。このとき、$\tan\delta_l = \infty$ である。低エネルギー極限で共鳴散乱のおこる条件は、式 (1) から $|1 + l + \gamma_l R| \ll 1$ である。(この条件はゼロエネルギーの束縛状態ができるための条件に対応している。) 以下、$l = 0$ の場合を考え、$|1 + \gamma_0 R| \ll 1$ とする。$k \to 0$ で $1 + \gamma_0 R = \kappa_0 R\cot\kappa_0 R$ となることを示せ。

(e) 低エネルギーで断面積が

$$\sigma \simeq \frac{4\pi R^2}{(\kappa_0 R \cot \kappa_0 R)^2 + (kR)^2}$$

となることを示せ。

3. 位相のずれ δ_l が、エネルギー E_R で $\pi/2$ になったとしよう。$E = E_R$ の付近で、$\cot \delta_l \simeq -(2/\Gamma)(E - E_R)$ と近似して、部分波断面積が

$$\sigma_l = \frac{4\pi(2l+1)}{k^2} \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

となることを導け。これを Breit-Wigner の公式という。