量子力学 3 演習 (田中担当クラス) 問題 No.12 (2003/1/9)

1. 斥力的 $\delta$ 殻ポテンシャルによる散乱について考える。ポテンシャルは $U(r) = (2m/\hbar^2)V(r) = \gamma\delta(r-a)$, $\gamma > 0$ である。動径波動関数 $\chi(r) = rR_{kl}(r)$ の満す方程式は No.10 問題 2(b) で示されている。以下、$l = 0$(s 波) の場合を考える。

   (a) $r < a$ での解を $\chi(r) = A\sin kr$、$r > a$ での解を $\chi(r) = \sin(k(r-a)+\eta)$ と置くことができる。(位相のずれは、$\delta_0 = -ka + \eta$ である。) これらの解の $r = a$ での接続条件を求め、それを解くことにより、

   $$\tan\eta = \frac{\tan ka}{1 + (\gamma/k)\tan ka}$$

   $$A^2 = \frac{1}{(\cos ka + (\gamma/k)\sin ka)^2 + \sin^2 ka}$$

   を示せ。

   (b) 次の式を示せ。

   $$\cot\delta_0 = \frac{1 + (\gamma/2k)\sin 2ka}{-(\gamma/k)\sin^2 ka}$$

   (c) 以下では $\gamma \gg k, 1/a$ とする。$|\tan ka| \ll 1$ でないとき (すなわち $\tan ka$ がゼロに近くないとき)、$\delta_0 \simeq -ka + n\pi$ であることを示せ。

   (d) $|\tan ka| \ll 1$ のとき、共鳴の条件 $\cot\delta_0 = 0$ を満すエネルギーが

   $$E_R \simeq \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\left(1 - \frac{2}{\gamma a}\right)$$

   となることを示せ。

   (e) 共鳴の幅 $\Gamma$ が

   $$\Gamma \simeq \frac{1}{\gamma^2}\frac{2\hbar^2}{ma}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3$$

   となることを示せ。(No.11 問題 3 を参照のこと。)

2. Coulomb ポテンシャルによる散乱について考える。

   (a) ポテンシャルは球対称だが、散乱問題では $z$ 軸方向の入射波があるので問題は軸対称である。そこで、放物座標 $(\xi, \eta, \phi)$ で考える。$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\phi$, $y = \sqrt{\xi\eta}\sin\phi$, $z = (\xi - \eta)/2$, $\xi, \eta \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$ である。また、$r = (\xi + \eta)/2$、$\xi = r + z$、$\eta = r - z$、$\phi = \tan^{-1}(y/x)$ などが成り立つ。さらに、

   $$\triangle = \frac{4}{\xi + \eta}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

   である。ポテンシャルを $V(r) = ZZ'e^2/r$ として、($\phi$ 依存性はないはずであるから) $\psi = f_1(\xi)f_2(\eta)$ と置き Schrödinger 方程式を変数分離して、

   $$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{k^2}{4}\xi - \beta_1\right)f_1(\xi) = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{k^2}{4}\eta-\beta_2\right)f_2(\eta)=0$$

$$\beta_1+\beta_2=q\equiv\frac{ZZ'e^2m}{\hbar^2}$$

となることを示せ。

(b) 散乱を記述するのは $\eta\to\infty$ で $\psi\approx e^{ikz}=e^{ik(\xi-\eta)/2}$ となるような解である。このことから $\beta_1=ik/2$ となることを示せ。

(c) 前問の結果から、$f_2$ の満す方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{k^2}{4}\eta-(q-\frac{i}{2}k)\right)f_2(\eta)=0$$

となる。$f_2(\eta)=e^{-ik\eta/2}w(\eta)$ と置いて $w(\eta)$ の満す方程式を導き、$\eta=0$ で正則な解が合流型超幾何関数で $w(\eta)=cF(-iq/k,1,ik\eta)$ と表されることを示せ。

(d) $|\zeta|\to\infty$ での $F(\alpha,\gamma,\zeta)$ の漸近形は

$$F(\alpha,\gamma,\zeta)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-\zeta)^{-\alpha}G(\alpha,\alpha-\gamma+1,-\zeta)+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^{\zeta}\zeta^{\alpha-\gamma}G(\gamma-\alpha,1-\alpha,\zeta)$$

$$G(\alpha,\beta,\zeta)=1+\frac{\alpha\beta}{\zeta}+O(1/\zeta^2)$$

で与えられる。これを用いて $\eta=r-z=r(1-\cos\theta)\to\infty$ での波動関数が (適当に規格化して)

$$\begin{aligned}\psi &\approx \left(1+\frac{q^2}{ik^3r(1-\cos\theta)}\right)\exp\{ikz+i(q/k)\log kr(1-\cos\theta)\} &(1)\\ &\quad+\frac{f(\theta)}{r}\exp\{ikr-i(q/k)\log 2kr\} &(2)\end{aligned}$$

$$f(\theta)=-\frac{q}{2k^2\sin^2(\theta/2)}\frac{\Gamma(1+i(q/k))}{\Gamma(1-i(q/k))}\exp\{-2i(q/k)\log\sin(\theta/2)\}$$

となることを示せ。

(e) $\psi$ の第 1 項 (式 (1)) と第 2 項 (式 (2)) について確率の流れ $\boldsymbol{j}$ を求め、それぞれが入射波と散乱波として解釈でき、$f(\theta)$ を散乱振幅と見做せることを説明せよ。

(f) 微分断面積を求め、それが Rutherford の公式と一致することを示せ。

(g) $f(\theta)$ を $k$(あるいは $E$) の複素関数とみて、$f(\theta)$ の極が Coulomb ポテンシャルによる束縛状態のエネルギーに対応していることを示せ。