量子力学 3 演習 (田中担当クラス) 問題 No.7 (2002/11/14)

1. 球対称ポテンシャル中の粒子の準古典近似を考えよう。動径波動関数 $\chi_l(r) = rR_l(r)$ は、ポテンシャル $V_l(r) = V(r) + \hbar^2 l(l+1)/(2mr^2)$ の 1 次元 Shrödinger 方程式を満たす。従って、$l = 0$ のときは 1 次元の準古典近似の議論がそのまま使える。(ただし、境界条件は $\chi_l(0) = 0$。)

   (a) $l \neq 0$ のとき、遠心力ポテンシャルにくらべて $V(r)$ が大きくないとして、全エネルギーと遠心力ポテンシャルが同じぐらいの大きさであるような小さな r について、No.6 の問題 1e の準古典性の条件が $l \gg 1$ となることを示せ。(すなわち、l が小さいと小さな r で準古典近似が使えなくなる。)

   (b) $V(r) = 0$ のとき、r が十分に大きいところで、No.6 の問題 3e の波動関数が球面波の漸近形 $\sim r^{-1}\sin(kr - \pi l/2)$ に一致することを示せ。ただし、遠心力ポテンシャルで $l(l+1)$ を $(l+1/2)^2$ に置き換えよ。($k = p/\hbar = \sqrt{2mE}/\hbar$ である。)

2. Coulomb ポテンシャル $V(r) = \pm Ze^2/r$ について考える。以下では、$l = 0$ の場合を考えれば十分である。

   (a) $|E| \sim |V|$ であるような r ので領域で、準古典近似が使えるための条件が、$|E| \ll |E_0| = m(Ze^2)^2/(2\hbar^2)$ であることを示せ。また、この条件が $Ze^2/(\hbar v) \gg 1$ と書けることを示せ。

   (b) 引力の場合で $|E| \ll |V|$ のとき (すなわち、原点の近くで)、準古典近似の条件が $r \gg a_0 = \hbar^2/(mZe^2)$ となることを示せ。

3. ポテンシャル障壁の透過確率を準古典近似で求めよう。回帰点を $x = a, b$ $(a < b)$ として、$a < x < b$ が古典的には許されない領域、$x < a$、$x > b$ が古典的に許される領域とする。粒子は x 軸の方向に入射しているものとする。

   (a) まず準備として、No.6 の問題 3 とは逆に古典的に許される領域から許されない領域への接続公式を求めよう。右下がりのポテンシャルを考えて、回帰点を $x = b$ とする。$x > b$ の波動関数は進行波

   $$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_b^x p\,dx' + i\frac{\pi}{4}\right)$$

   であるとしよう。点 $x = b$ を上半面に迂回することにより、$x < b$ で

   $$\psi = \frac{C}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^b |p|\,dx'\right)$$

   となることを示せ。

   (b) ポテンシャル障壁の透過の問題では、上で示した ψ は $a < x < b$ での波動関数である。この波動関数に No.6 の問題 3 の接続公式を適用して $x < a$ での波動関数が

   $$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^b |p|\,dx\right)\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\,dx' + i\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\,dx' - i\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

   となることを示せ。

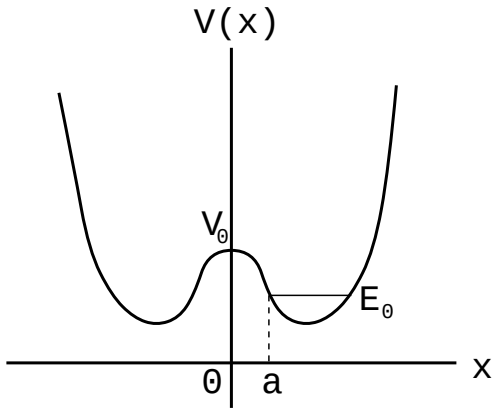
(c) 透過確率を求めよ。

4. 原子核の α 崩壊について考える。α 粒子は核から Coulomb 斥力を受けると同時に核の近くでは核力を受け束縛されている。そこで、ポテンシャルを $r < r_0$ で $V(r) = -V_0\,(< 0)$、$r > r_0$ で $V(r) = 2Ze^2/r$ とモデル化してみよう。(r_0 は原子核の大きさ程度である。)

(a) α 崩壊の確率は、このポテンシャル井戸からトンネル効果により粒子が脱出する確率である。$l = 0$ として、エネルギー E の α 粒子について、この確率 (の指数関数因子) を準古典近似で求めよ。最後に $r_0 \to 0$ の極限をとること。

(b) 準古典近似が使えるとき、この確率は小さいことを示せ。(問題 2a の結果を用いよ。)

5. 図のような $V(x) = V(-x)$ の 2 重井戸型ポテンシャルを考える。中央の壁を透過する確率を無視すると、$x > 0$ の井戸に束縛されたエネルギー E_0 をもつ規格化された準古典解 $\psi_0(x)$ を考えることができる。この解は $x > 0$ の井戸の両側の古典的に到達できない領域では指数関数的に減衰し、$x < 0$ の領域でも指数関数的に小さい。ψ_0 に対応する規格化された全体の解は、ポテンシャルの対称性から、$\psi_\pm(x) = (\psi_0(x) \pm \psi_0(-x))/\sqrt{2}$ となり、エネルギー準位は $E_\pm$ に分裂する。



(a) $\psi_+''\psi_- - \psi_+\psi_-''$ の $0 < x < \infty$ での積分を考えることにより、$E_+ - E_- \simeq (-2\hbar^2/m)\psi_0(0)\psi_0'(0)$ を導け。

(b) No.6 の問題 4d の波動関数と No.6 の問題 3e の接続公式を用いて、$\psi_0(0), \psi_0'(0)$ を決定し、

$$E_+ - E_- \simeq -\frac{\hbar\omega}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{-a}^{a}|p|dx\right)$$

となることを示せ。