量子力学 3 演習 (田中担当クラス) 問題 No.8 (2002/11/21)

1. z 軸方向に進む平面波で記述される粒子が球対称ポテンシャル $V(r)$ に入射している。ただし、ポテンシャルは遠方で十分に速くゼロになるものとする。十分遠方では波動関数は入射波 (平面波) と散乱波 (球面波) の重ね合わせ

$$\varphi(\boldsymbol{r}) \approx e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r} \quad (r \to \infty) \tag{1}$$

で書ける。($f(\theta)$ は散乱振幅と呼ばれる。)

   (a) 上の波動関数が時間に依存しない Schrödinger 方程式を $r \to \infty$ で満たしていることを示せ。

   (b) 確率の流れが遠方で

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \approx \frac{\hbar k}{m}\left[\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_r|f(\theta)|^2\frac{1}{r^2} + (\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_r)\mathrm{Re}\left\{f(\theta)\frac{e^{ik(r-z)}}{r}\right\} + \cdots\right] \tag{2}$$

   となることを示せ。

   (c) 式 (2) の第 1 項は入射フラックス $j_{\mathrm{inc}} = \hbar k/m = v$ を表わし、第 2 項は散乱された粒子の動径方向への流れ $j_{\mathrm{sc},r} = v|f(\theta)|^2/r^2$ を表わしている。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega = \frac{\text{単位時間に } d\Omega\text{内に散乱される粒子数}}{\text{単位時間に単位面積に入射する粒子数}}$$

   で微分断面積 $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ を定義すると、

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

   となることを示せ。

   (d) 十分大きな球面での式 (2) の積分は、粒子数の保存からゼロのはずである。このことから、光学定理

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}f(0)\,, \quad \text{ただし、} \sigma_{\mathrm{tot}} = \int\frac{d\sigma}{d\Omega}d\Omega$$

   を示せ。

2. 式 (1) の境界条件を持つ波動関数の満す積分方程式について考えよう。

   (a) 時間に依存しない Schrödinger 方程式を $(\Delta + k^2)\varphi(\boldsymbol{r}) = U(r)\varphi(\boldsymbol{r})$ と書く。ただし、$k^2 = 2mE/\hbar^2$、$U(r) = 2mV(r)/\hbar^2$ である。$(\Delta + k^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$ を満たす Green 関数 $G(\boldsymbol{r})$ を用いると、上の Schrödinger 方程式は積分方程式

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi_0(\boldsymbol{r}) + \int d^3r' G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')U(r')\varphi(\boldsymbol{r}') \tag{3}$$

   に帰着することを示せ。ここで、$\varphi_0(\boldsymbol{r})$ は $(\Delta + k^2)\varphi_0(\boldsymbol{r}) = 0$ の解である。

(b) Fourier 変換を用いて $(\Delta + k^2)G(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r})$ を解き、Green 関数が

$$G_{\pm}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ikr}}{r}$$

となることを示せ。

(c) $\varphi_0(\boldsymbol{r}) = e^{ikz}$ とし、$G(\boldsymbol{r})$ として外向きの球面波に対応する Green 関数 $G_+(\boldsymbol{r})$ を持ってくれば、式 (1) の境界条件を満たしていることを示せ。さらに $f(\theta)$ の表式を求めよ。

3. 球対称でないポテンシャルによる粒子の散乱について考える。十分遠方での波動関数の漸近形は

$$\psi(\boldsymbol{r}) \approx e^{i\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r}} + f(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}_i)\frac{e^{ikr}}{r}$$

と書ける。ただし、$\boldsymbol{k}_{i(f)}$ は入射 (散乱) 粒子の波数ベクトルで、$k = |\boldsymbol{k}_{i(f)}|$、$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{k}_f/k$ である。

(a) 入射方向についての $\psi(\boldsymbol{r})$ の重ね合わせも散乱過程を表す。これを

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \int \psi(\boldsymbol{r})F(\boldsymbol{k}_i)d\Omega_i$$

と書こう。($d\Omega_i$ は入射方向 $\boldsymbol{k}_i/k$ の立体角要素。)

$$\Psi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{2\pi i}{k}\left[\frac{e^{-ikr}}{r}F(-\boldsymbol{k}_f) - \frac{e^{ikr}}{r}F(\boldsymbol{k}_f)\right] + \frac{e^{ikr}}{r}\int f(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}_i)F(\boldsymbol{k}_i)d\Omega_i$$

となることを示せ。(ヒント：$kr \gg 1$ ゆえ、$\boldsymbol{k}_i = \pm\boldsymbol{k}_f$ の近傍が平面波部分の積分を支配する。$\cos\theta = \boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{k}_f/k^2$ の [-1,1] での積分を上半面を通るように変形してみよ。)

(b) 散乱演算子 (散乱行列ともいう)$\hat{S}$ を $\hat{S} = 1 + 2ik\hat{f}$ と定義する。ただし、

$$\hat{f}F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{4\pi}\int f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')F(\boldsymbol{k}')d\Omega'$$

である。この $\hat{S}$ を用いれば、

$$\Psi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{2\pi i}{k}\left[\frac{e^{-ikr}}{r}F(-\boldsymbol{k}_f) - \frac{e^{ikr}}{r}\hat{S}F(\boldsymbol{k}_f)\right]$$

と書ける。第 1 項は原点への収束波、第 2 項は原点からの発散波を表している。確率の保存から、これらの大きさ (規格化) は等しくなければならない。すなわち、$\hat{S}$ はユニタリー演算子で $\hat{S}^\dagger\hat{S} = 1$ を満す。このことから、

$$f(\boldsymbol{k}_f, \boldsymbol{k}_i) - f^*(\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}_f) = \frac{ik}{2\pi}\int f^*(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_f)f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_i)d\Omega$$

を示し、光学定理を導け。($\hat{f}^\dagger F(\boldsymbol{k}) = (1/4\pi)\int f^*(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k})F(\boldsymbol{k}')d\Omega'$ である。)