量子力学 3 演習 (田中担当クラス) 問題 No.9 (2002/11/28)

1. ポテンシャルによる散乱を記述する積分方程式は

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}} + \int d^3r' G_+(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')U(\boldsymbol{r}')\varphi(\boldsymbol{r}') \tag{1}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{k}_i$ は入射粒子の波数ベクトルである。

(a) U を摂動とみなして、逐次近似によりこの方程式の解を U の 1 次まで求め、散乱振幅が

$$f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_i) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r e^{-i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_i)\boldsymbol{r}}V(\boldsymbol{r})$$

となることを示せ。(Born 近似。) ただし、$\boldsymbol{k}$ は散乱粒子の波数ベクトルである。(散乱振幅はポテンシャルの Fourier 変換になっている。)

(b) Born 近似が良い近似であるためには、式 (1) の右辺第 2 項の大きさが右辺第 1 項の大きさより十分に小さいことが条件となる。ポテンシャルのおよぶ距離を a 程度として、この条件が低エネルギーのとき (すなわち $ka \lesssim 1$ のとき) $|V| \ll \hbar^2/ma^2$、高エネルギーのとき (すなわち $ka \gg 1$ のとき)$|V| \ll ka\hbar^2/ma^2$ となることを示し、その意味を考えよ。

(c) Fermi の黄金則を用いて微分断面積の表式を求め、Born 近似の結果と比較せよ。

(d) $ka \ll 1$ のとき、散乱が等方的であることを示せ。

(e) 球対称ポテンシャルの場合、Born 近似の散乱振幅が

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\int drrV(r)\frac{\sin qr}{q}\,, \qquad q = |\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_i| = 2k\sin(\theta/2)\,, \cos\theta = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_i/k^2$$

と書けることを示せ。

2. 3 次元球対称井戸型ポテンシャル $V = -V_0\,(r<a), V = 0\,(r>a)$ による散乱の微分断面積と全断面積を Born 近似で求め、

$$\sigma = \frac{16\pi a^2}{9}\left(\frac{ma^2}{\hbar^2}V_0\right)^2, \qquad ka \ll 1$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2}\left(\frac{ma^2}{\hbar^2}V_0\right)^2, \qquad ka \gg 1$$

となることを示せ。

3. 湯川ポテンシャル $V(r) = -V_0 e^{-\alpha r}/\alpha r$ による散乱を考える。

(a) 微分断面積および全断面積を Born 近似で計算せよ。

(b) Born 近似が良い近似であるための条件を求めよ。

(c) 陽子と中性子の相互作用は $V_0 = 10\mathrm{MeV}$、$\alpha^{-1} = 1.3\mathrm{f}m = 1.3\times10^{-13}\mathrm{c}m$ の湯川ポテンシャルで記述されるとしよう。重心系での陽子の運動量が $50\mathrm{MeV}/c$ のとき、陽子–中性子散乱の全断面積を mb の単位で求めよ。ただし、陽子、中性子の質量を $940\mathrm{MeV}$ とせよ。

(d) $V_0/\alpha = ZZ'e^2$ と固定して $\alpha\to 0$ の極限を考えることにより、クーロンポテンシャルによる散乱の微分断面積を求めよ。