量子力学 3 演習 No.14 (00/2/3)

1. No.13 の問題 2 で得た接続条件を回帰点付近での厳密解を使わない方法で求めよう。$x > a$、$x \sim a$ での波動関数は

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{C}{2\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_a^x |p|\,dx'\right) \\ &= \frac{C}{2(2m|F_0|)^{1/4}} \frac{1}{(x-a)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_a^x \sqrt{2m|F_0|(x'-a)}\,dx'\right\}\end{aligned}$$

と書ける。

(a) 波動関数 $\psi(x)$ を形式的に複素数 x の関数とみなし、$x-a$ が正から負へ移る際に (常に準古典性が満されるように) $x=a$ から十分離れた経路を通ればよい。$x-a=\rho e^{i\varphi}(\rho>0)$ と置き、φ を $0 \to \pi$ として上半面の半円を通ることにしよう。

$$\int_a^x \sqrt{x'-a}\,dx' = \frac{2}{3}\rho^{3/2}\left(\cos\frac{3}{2}\varphi + i\sin\frac{3}{2}\varphi\right)$$

を示し、φ が $0 \to \pi$ と変化するとき、

$$-\frac{1}{\hbar}\int_a^x |p|\,dx' \longrightarrow -\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\,dx'$$

となることを示せ。

(b) 同様に φ が $0 \to \pi$ と変化するとき、$(x-a)^{-1/4} \to (a-x)^{-1/4}e^{-i\pi/4}$ となることを示し、上の結果を合せて接続条件 $C_2 = (C/2)e^{-i\pi/4}$ を示せ。ここで、$x < a$ での波動関数は No.13 の問題 2 と同様に、

$$\psi = \frac{C_1}{\sqrt{p}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\,dx\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\,dx\right)$$

とする。

(c) 下半面の半円を通る経路を考えて、もうひとつの接続条件 $C_1 = (C/2)e^{i\pi/4}$ を導け。

(d) ポテンシャルが右下がりの場合について、上と同様にして接続条件を求め、右上がりの場合と合せて、回帰点が $x=a$ のとき、

$$V(x) > E \text{ で} \quad \psi = \frac{C}{2\sqrt{|p|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p\,dx'\right|\right)$$

$$\downarrow$$

$$V(x) < E \text{ で} \quad \psi = \frac{C}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\left|\int_a^x p\,dx'\right| - \frac{\pi}{4}\right)$$

という接続公式が成り立つことを示せ。

2. ポテンシャルの井戸の中の準古典的な粒子の運動を考える。回帰点を $x = a, b$ $(a < b)$ とする。

   (a) $x > b$ で

   $$\psi(x) = \frac{C}{2\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_b^x |p|\, dx'\right)$$

   として、問題 1 の接続公式を用いて $a < x < b$ での波動関数を決定せよ。

   (b) 同様に $x < a$ で

   $$\psi(x) = \frac{C'}{2\sqrt{|p|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_x^a |p|\, dx'\right)$$

   として、$a < x < b$ での波動関数を決定せよ。

   (c) これらの波動関数が一致することを要請して、Bohr–Sommerfeld の量子化条件、

   $$\frac{1}{2\pi\hbar}\oint p\, dx = n + \frac{1}{2}$$

   を導け。また、n は波動関数のゼロ点の数であることを確かめよ。

3. ポテンシャル障壁の透過確率を準古典近似で求めよう。回帰点を $x = a, b$ $(a < b)$ として、$a < x < b$ が古典的に許される領域、$x < a$、$x > b$ が古典的には許されない領域とする。粒子は x 軸の方向に入射しているものとする。

   (a) まず準備として、問題 1 とは逆に古典的に許される領域から許されない領域への接続公式を求めよう。右下がりのポテンシャルを考えて、回帰点を $x = b$ とする。$x > b$ の波動関数は進行波

   $$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_b^x p\, dx' + i\frac{\pi}{4}\right)$$

   であるとしよう。点 $x = b$ を上半面に迂回することにより、$x < b$ で

   $$\psi = \frac{C}{\sqrt{|p|}} \exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_x^b |p|\, dx'\right)$$

   となることを示せ。

   (b) ポテンシャル障壁の透過の問題では、上で示した ψ は $a < x < b$ での波動関数である。この波動関数に問題 1 の接続公式を適用して $x < a$ での波動関数が

   $$\psi = \frac{C}{\sqrt{p}} \exp\left(\frac{1}{\hbar}\int_a^b |p|\, dx\right)\left[\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\, dx' + i\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_a^x p\, dx' - i\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

   となることを示せ。

   (c) 透過確率を求めよ。