量子力学 3 演習 No.2 (99/10/14)

1. 周期的なポテンシャルを持つ 1 次元系を考える。ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad V(x+a) = V(x)$$

である。

(a) 並進演算子 $U = \exp(ipa/\hbar)$ が $H$ と可換であることを示せ。

(b) $U$ の固有値を $\exp(ika) \quad (-\pi/a \leq k \leq \pi/a)$ と置き、$V = 0$ のときの $k$ の値に対するエネルギー準位を図示せよ。

(c) $V \neq 0$ のとき、$V$ を摂動として扱いエネルギー準位がどのように変化するか示せ。(ヒント：$V$ は実周期関数だから次のように Fourier 級数に展開できる。

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{2\pi}{a}nx\right), \quad c_{-n} = c_n^*$$

指数関数の部分は運動量の推進演算子であることに注意せよ。)

2. クーロンポテンシャルで記述される水素原子を考える。

(a) 主量子数 $n = 2$ の状態の縮退の様子を示せ。

(b) この系に一様な z 方向の電場 $E$ をかけるとポテンシャルとして $V_E = -ezE$ がハミルトニアンに付け加わる。$n = 2$ の状態の空間での $V_E$の行列要素を求めよ。

(c) $V_E$による摂動でどのように $n = 2$ の状態の縮退がとけるか示せ。(Stark 効果)

(d) 実際の水素原子では $2s$、$2p$ の状態はクーロンポテンシャル以外の効果により縮退していない。上の計算はどのようなときに適用できるか。

3. ハミルトニアンが

$$H_0 = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

で与えられる 2 次元の等方調和振動子を考える。

(a) 低い方から 3 番目までの状態のエネルギーを求めよ。縮退は存在するか。

(b) 次に摂動 $V = \delta m\omega^2 xy$ をかけたとする。ただしここで $\delta$ は 1 よりずっと小さい無次元の実数とする。上で求めた 3 つの状態のそれぞれに対して、摂動の 1 次の補正を加えたエネルギーを求めよ。

(c) ハミルトニアンが $H_0 + V$ で与えられる系は実は厳密に解ける。上の 3 つの状態に対応する厳密なエネルギー固有値を求め、上の結果と比較せよ。(ヒント：全ハミルトニアンは $x$ と $y$ の入れかえに対して不変である。)