ユニタリティートライアングル
— B 中間子物理入門 —

田中 実 (素粒子論研究室)

1. はじめに
2. クォーク混合と CP の破れ
3. 小林・益川行列とユニタリティートライアングル
4. B–$\bar{B}$ 混合の量子力学:$|V_{td}|$ の測定
5. B 中間子崩壊での CP の破れ：角度の測定
6. まとめ

1. はじめに

- 素粒子の標準模型とは？

電弱統一模型 (Weinberg–Salam 模型)$\oplus$ 量子色力学 (QCD)

力を媒介する粒子: 光子、$W^{\pm}$ 粒子、Z 粒子、グルーオン

物質粒子: クォーク、レプトン

対称性を破る粒子: Higgs 粒子 (未発見)

- クォーク、レプトンのフレーバー

第 1 世代： $(u_{\frac{2}{3}}, d_{-\frac{1}{3}}), (e_{-1}, \nu_{e0})$

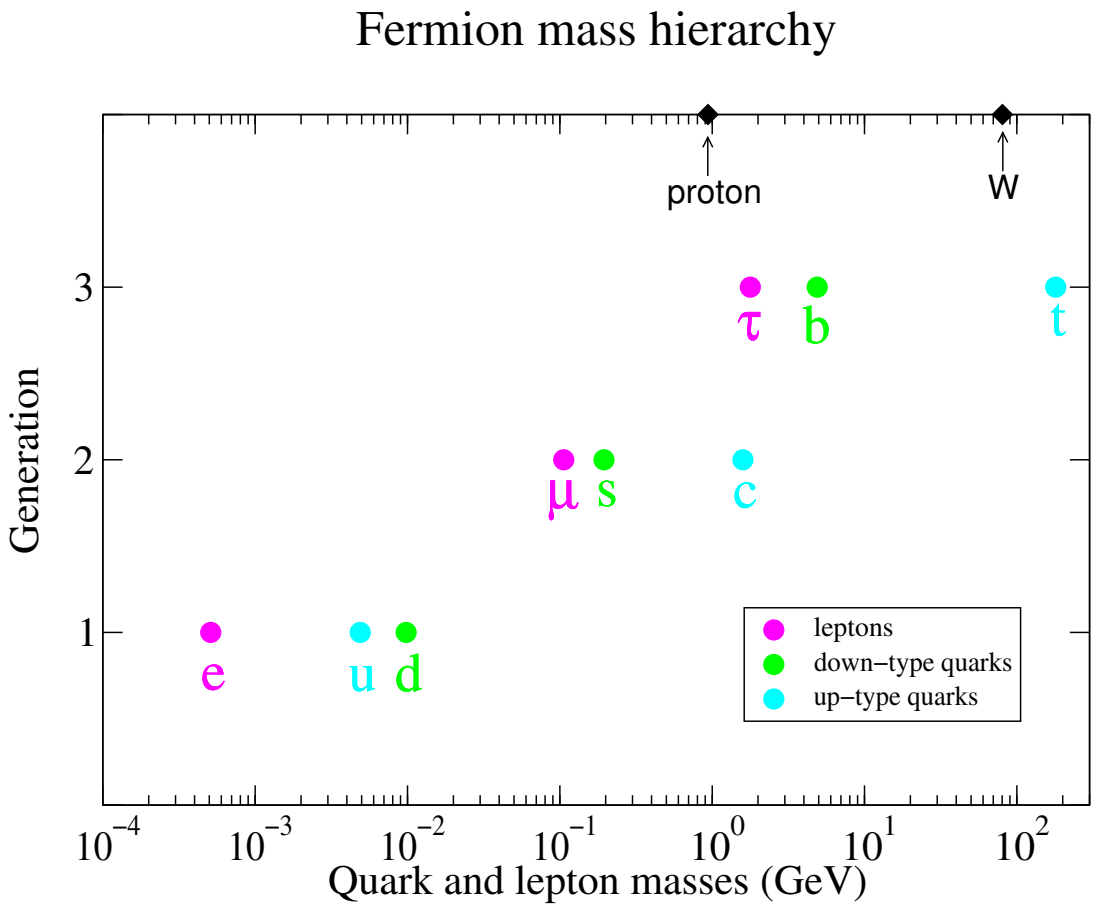
第 2 世代： $(c, s), (\mu, \nu_{\mu})$

第 3 世代： $(t, b), (\tau, \nu_{\tau})$

質量以外の量子数は同じ。

世代の問題：なぜ 3 世代あるのか？

- クォーク、レプトンの質量の階層性



$$
\begin{aligned}
m_e &= 0.511\,\mathrm{MeV} \\
m_\mu &= 106\,\mathrm{MeV} \\
m_\tau &= 1.78\,\mathrm{GeV} \\
m_d &= 9.8 \pm 0.7\,\mathrm{MeV} \\
m_s &= 195 \pm 13\,\mathrm{MeV} \\
m_b &= 4.89 \pm 0.05\,\mathrm{GeV} \\
m_u &= 4.9 \pm 0.6\,\mathrm{MeV} \\
m_c &= 1.59 \pm 0.02\,\mathrm{GeV} \\
m_t &= 180 \pm 12\,\mathrm{GeV}
\end{aligned}
$$

- B 中間子とは？

$\Rightarrow b$ クォーク (反 b クォーク) を 1 つ含んでいる中間子

$B^+ = (\bar{b}u), B_d = (\bar{b}d), B_s = (\bar{b}s)$

$B^- = (b\bar{u}), \bar{B}_d = (b\bar{d}), \bar{B}_s = (b\bar{s})$

質量：$m_B \sim 5.3\,\mathrm{GeV}$、寿命：$\tau_B \sim 1.6\,\mathrm{ps}$

B 中間子の崩壊などで クォーク混合 や CP の破れ について調べることができる。

- B ファクトリー

KEKB (KEK, つくば)、PEP-II (SLAC, Stanford)

$e^+e^- \to \Upsilon(4S) \to B^+B^-, B_d\bar{B}_d$

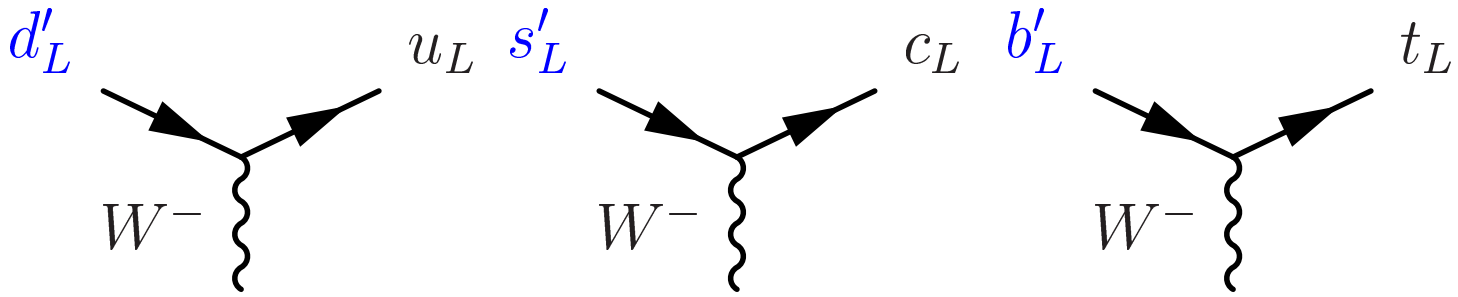
年間 $O(10^8)$ 個の B 中間子を生成

2. クォーク混合と CP の破れ

- 荷電カレント相互作用

$W^{\pm}$ 粒子を媒介とする弱い相互作用で、β 崩壊を起こす。

左巻きのクォーク・レプトンのみ。$\Leftarrow$ パリティー (P) の破れ



d'_L, s'_L, b'_L: フレーバー (あるいはゲージ) の固有状態

$\Rightarrow$ 同じ世代間での遷移のみ

フレーバーの固有状態 $\neq$ 質量の固有状態 (d_L, s_L, b_L)

- フレーバーの固有状態と質量の固有状態の関係

$\Rightarrow$ ユニタリー変換で結びつく。

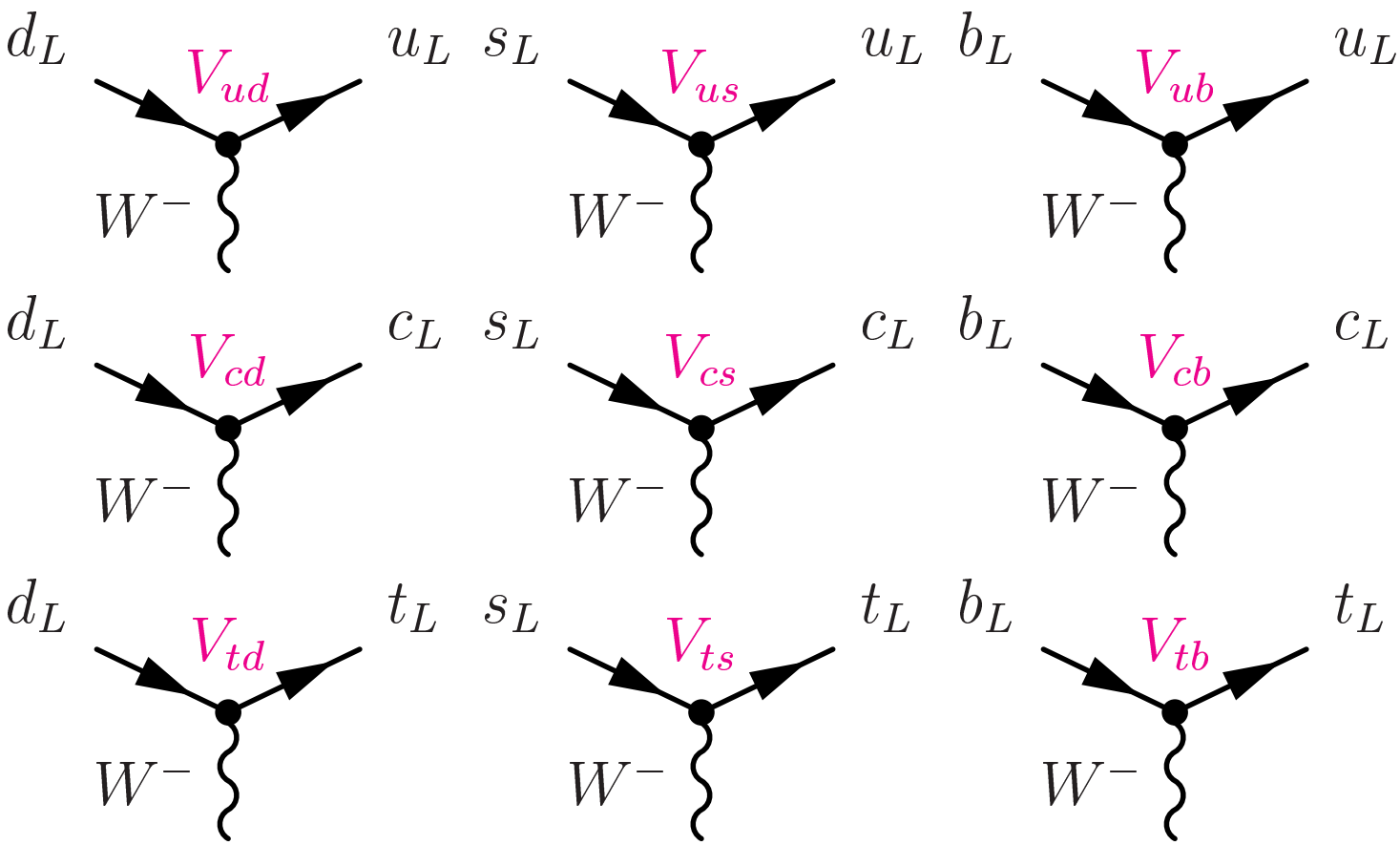
$$\begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \\ b'_L \end{pmatrix} = V_{KM} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}$$

V_{KM}: 3×3 ユニタリー行列 $\Leftarrow$ 小林・益川 (KM) 行列

$\Rightarrow$ クォークの混合を表す

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}$$

- 質量固有状態で見た荷電カレント相互作用



異なる世代間の遷移がある

- CP の破れ

P: パリティー変換 (空間反転)

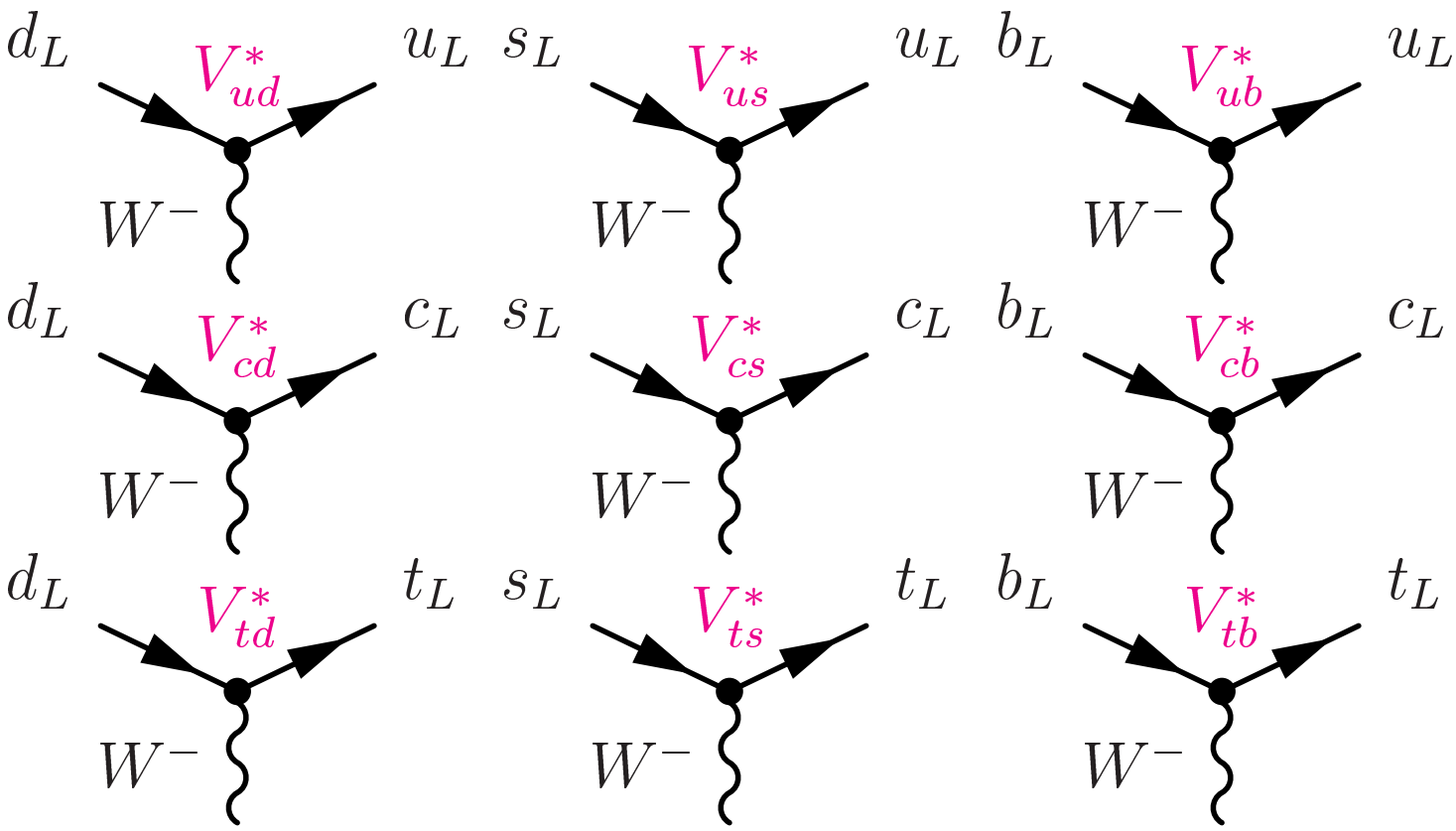
C: 荷電共役変換 (粒子 $\leftrightarrow$ 反粒子)

標準模型では、C、P ともに大きく破れている。
ところが、CP は良い対称性。(ほとんど保存している。)
例：ニュートリノは左巻き、反ニュートリノは右巻き。

CP も少し破れている。(1964 年、クローニンらの発見。)
$K_L \to \pi^+\pi^-$ の分岐比 $\sim 10^{-3}$

CP の破れは荷電カレント相互作用によって引き起こされる。

- 荷電カレント相互作用を CP 変換してみると



$V_{ij} \to V_{ij}^*$ となるだけ。

$V_{ij} = V_{ij}^*$ 、すなわち V_{ij} が実数なら CP は保存する。

3. 小林・益川 (KM) 行列とユニタリティートライアングル

- V_{KM} に含まれる物理的パラメーターの数

N_G 世代あるとする。 $\rightarrow V_{KM} = N_G \times N_G$ ユニタリー行列

$N_G \times N_G$ ユニタリー行列	N_G^2 個の実パラメーター	
回転 (混合角)	$N_G(N_G-1)/2$	物理的
クォークの位相の再定義	$2N_G \underbrace{-1}_{U(1)_B}$	非物理的
CP を破る複素位相	$(N_G-1)(N_G-2)/2$	物理的

$N_G = 1, 2$ では CP は破れない。

$N_G = 3$: 3 個の混合角と 1 個の複素位相

- KM 行列の階層性

K 中間子やハイペロンの崩壊 $\Rightarrow |V_{us}| = 0.220 \pm 0.002$

B 中間子 (b クォーク) の崩壊 $\Rightarrow |V_{ub}| \ll |V_{cb}| \ll |V_{us}| \ll 1$

$\Longrightarrow$ Wolfenstein 表示

$V_{us} = \lambda \simeq 0.22,\ V_{cb} = \lambda^2 A,\ V_{ub} = \lambda^3 A(\rho - i\eta)$

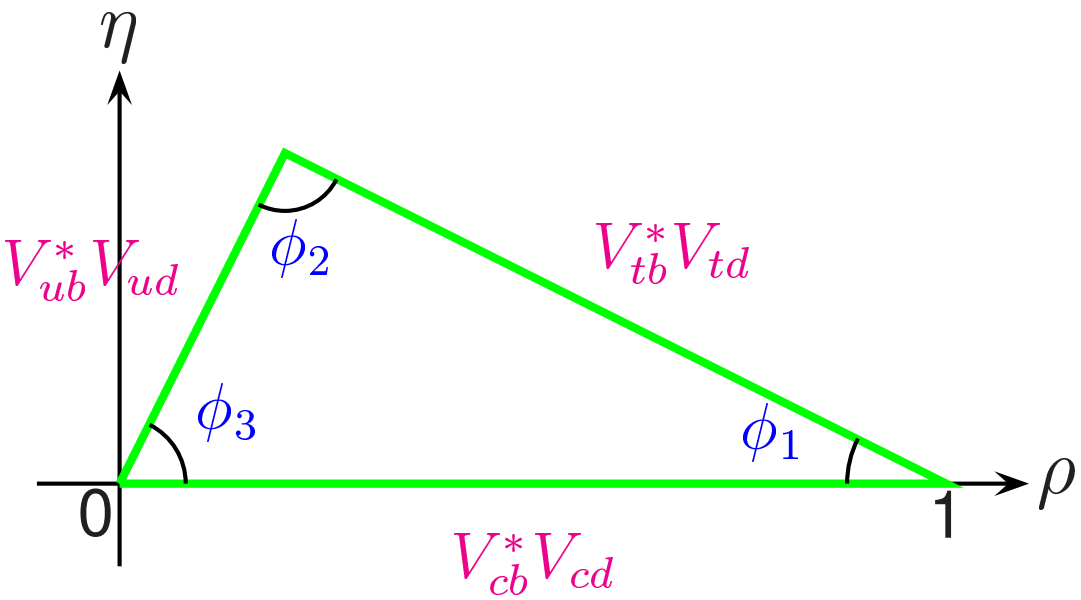
$$V_{KM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1 - \rho - i\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix}$$

クォーク質量の階層性と関係?

- ユニタリティートライアングル

KM 行列のユニタリティー

$$\Rightarrow 0 = V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} \simeq V_{ub}^* - \lambda V_{cb}^* + V_{td}$$



三角形の面積 $\simeq \lambda^6 A^2 \eta/2$:　CP の破れの大きさを表す

辺の長さと角度を測って矛盾がないか確める。

⇓

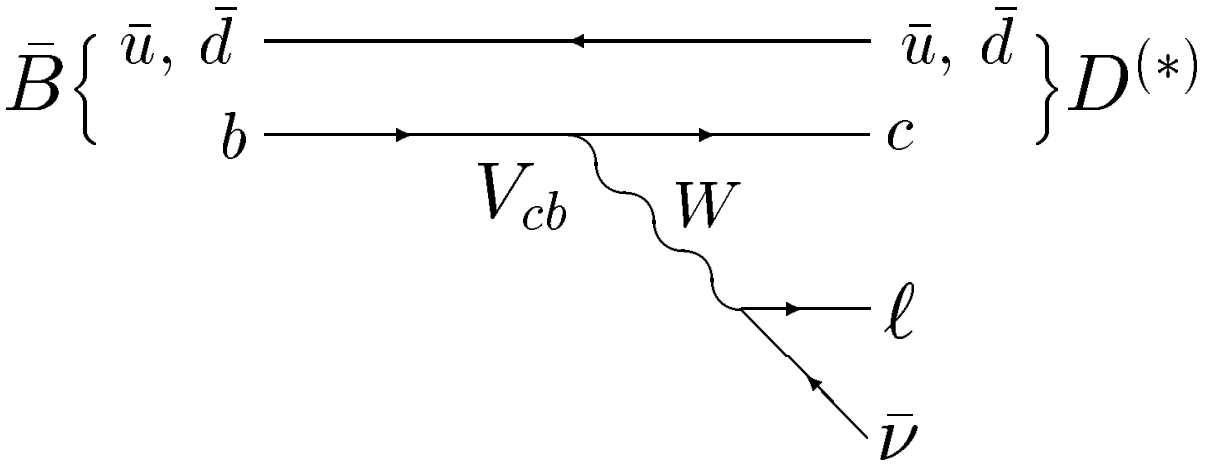
小林・益川理論の検証

CP の破れのメカニズムの解明

矛盾があれば標準模型を越える新しい物理の発見

$|V_{cb}|$: B のセミレプトニック崩壊 $(b \to c)$

Exclusive: $B \to D^* l\nu$



Inclusive: $B \to X_c l\nu$

- $B \to D^* l\nu$ with HQET $\left(F_{D^*}(0) = 0.90 \pm 0.05\right)$

$$|V_{cb}| = \begin{cases} (47.1 \pm 2.0|_{stat} \pm 2.1|_{sys} \pm 2.1|_{th}) \times 10^{-3} \text{ CLEO} \\ (38.8 \pm 0.8|_{stat} \pm 1.8|_{sys} \pm 1.7|_{th}) \times 10^{-3} \text{ LEP} \end{cases}$$

- $B \to X_c l\nu$ using OPE

$$|V_{cb}| = (40.76 \pm 0.41|_{exp} \pm 2.0|_{th}) \times 10^{-3} \text{ LEP}$$

$|V_{ub}|$: B のセミレプトニック崩壊 $(b \to u)$

- $B \to X_u l\nu$ endpoint spectrum: $E_l > (m_B^2 - m_D^2)/2m_B$
  $|V_{ub}| = (3.2 \pm 0.8) \times 10^{-3}$, sensitive to hadronic model
- $B \to X_u l\nu$ width with OPE

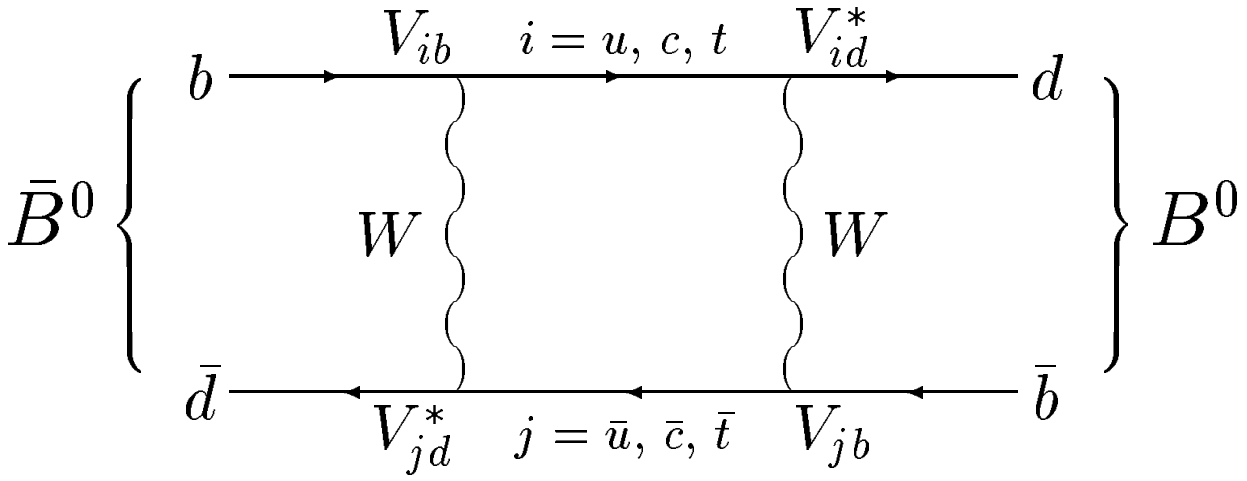
$$|V_{ub}| = (4.04 \pm 0.44|_{stat} \pm 0.46|_{b\to c,sys} \pm 0.25|_{b\to u,sys} \pm 0.02|_{\tau_b} \pm 0.19|_{HQE}) \times 10^{-3}$$

  Cuts in hadronic and/or leptonic invariant mass may help.

- $B \to (\rho, \pi) l\nu$
  $|V_{ub}| = (3.25 \pm 0.14|_{stat} \pm 0.27|_{sys} \pm 0.55|_{th}) \times 10^{-3}$
  sensitive to hadronic model
  Small recoil region will be predicted by lattice QCD.

$|V_{td}|$: B^0–$\bar{B}^0$ 混合

ボックスダイアグラム



トップクォーク $(t, \bar{t})$ の寄与が大きい $\Rightarrow |V_{td}|$ が測れる。

B_s の場合 $(d \to s) \Rightarrow |V_{ts}|$

4. B^0–$\bar{B}^0$ 混合の量子力学

$B^0 \leftrightarrow \bar{B}^0$ 遷移 $\Rightarrow$ B^0–$\bar{B}^0$ 混合

波動関数: $|\psi(t)\rangle = \psi_B(t)|B^0\rangle + \psi_{\bar{B}}(t)|\bar{B}^0\rangle$

$$|\psi_B(0)|^2 + |\psi_{\bar{B}}(0)|^2 = 1$$

運動方程式 (Schrödinger 方程式):

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \psi_B(t) \\ \psi_{\bar{B}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} - \frac{i}{2}\Gamma_{11} & M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12} \\ M_{21} - \frac{i}{2}\Gamma_{21} & M_{22} - \frac{i}{2}\Gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_B(t) \\ \psi_{\bar{B}}(t) \end{pmatrix}$$

M, Γ: 2×2 エルミート行列

注) $M - \frac{i}{2}\Gamma$ はエルミートでない. $\Leftarrow$ B 中間子崩壊

$H = H_s + H_w$

H_s: 強い相互作用のハミルトニアン

H_w: 弱い相互作用のハミルトニアン

2 次の摂動

$$
\begin{aligned}
M_{ij} &= \langle i|H|j\rangle + \sum_n P\frac{1}{m_B - E_n}\langle i|H|n\rangle\langle n|H|j\rangle \\
\Gamma_{ij} &= 2\pi\sum_n \delta(m_B - E_n)\langle i|H|n\rangle\langle n|H|j\rangle
\end{aligned}
$$

$$
i,j = 1,2, \quad |1\rangle = |B^0\rangle, |2\rangle = |\bar{B}^0\rangle
$$

CPT 不変性 (T:時間反転)

CPT 変換: $CPT|B^0\rangle = |\bar{B}^0\rangle$

$$\begin{aligned}\langle B^0|H|B^0\rangle &= \langle B^0|(CPT)^{-1}H\,CPT|B^0\rangle \\ &= \langle \bar{B}^0|H|\bar{B}^0\rangle^* = \langle \bar{B}^0|H|\bar{B}^0\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\langle B^0|H|n\rangle|^2 &= |\langle B^0|(CPT)^{-1}H\,CPT|n\rangle|^2 \\ &= |\langle \bar{B}^0|H|\bar{n}\rangle^*|^2 = |\langle \bar{B}^0|H|\bar{n}\rangle|^2\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $M_{11} = M_{22}(\equiv M_0)$, $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}(\equiv \Gamma_0)$ (because of $\sum_n$.)

粒子と反粒子の質量、幅 (寿命) が等しい。

CP 不変性

CP 変換: $CP|B^0\rangle = -|\bar{B}^0\rangle$

もし CP 不変ならば

$$\langle B^0|H|\bar{B}^0\rangle = \langle B^0|(CP)^{-1}H\,CP|\bar{B}^0\rangle = \langle \bar{B}^0|H|B^0\rangle$$
$$\langle B^0|H|n\rangle\langle n|H|\bar{B}^0\rangle = \langle \bar{B}^0|H|\bar{n}\rangle\langle \bar{n}|H|B^0\rangle$$

$\Longrightarrow$ $M_{12} = M_{21} = M_{12}^*(=$ 実数$)$, $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \Gamma_{12}^*(=$ 実数$)$

CP の固有状態: $|B_\pm\rangle = (|B^0\rangle \mp |\bar{B}^0\rangle)/\sqrt{2}$

物理的な状態 (ハミルトニアンの固有状態)

$M - \frac{i}{2}\Gamma$ の固有ベクトル: $|B_{H,L}\rangle = p|B^0\rangle \pm q|\bar{B}^0\rangle$

H: heavy, L: light

$$\frac{q}{p} = \frac{\sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)}}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}, \quad |p|^2 + |q|^2 = 1$$

固有値: 質量 と 幅 ($\propto$ 寿命の逆数)

$$\begin{aligned} \lambda_{H,L} &= m_{H,L} - \frac{i}{2}\Gamma_{H,L} \\ &= M_0 - \frac{i}{2}\Gamma_0 \pm \sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)} \end{aligned}$$

質量と幅の差

$$\begin{aligned}\Delta m &\equiv m_H - m_L = 2\mathrm{Re}\sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)} \\ &> 0 \\ \Delta\Gamma &\equiv \Gamma_H - \Gamma_L = -4\mathrm{Im}\sqrt{(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12})(M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*)}\end{aligned}$$

状態の時間発展

Schrödinger 方程式の解

$$B^0 \text{ at } t=0 : |B^0(t)\rangle = g_+(t)|B^0\rangle + \frac{q}{p} g_-(t)|\bar{B}^0\rangle$$
$$\bar{B}^0 \text{ at } t=0 : |\bar{B}^0(t)\rangle = \frac{p}{q} g_-(t)|B^0\rangle + g_+(t)|\bar{B}^0\rangle$$

$$g_\pm(t) = \tfrac{1}{2}[\exp(-i\lambda_H t) \pm \exp(-i\lambda_L t)]$$

標準模型: ボックスダイアグラム ($= M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}$)

$\Rightarrow$ $|M_{12}| \gg |\Gamma_{12}|$

$$\Delta m = 2|M_{12}|, \ \Delta\Gamma = 0 \ (\Gamma_H = \Gamma_L \equiv \Gamma)$$

$$\frac{q}{p} = \frac{M_{12}^*}{|M_{12}|} = \frac{V_{tb}^* V_{td}}{V_{tb} V_{td}^*} = e^{-2i\phi_1}$$

- B^0–$\bar{B}^0$ 混合の測定

レプトンタグ : $B^0 \to l^+ X,\ \bar{B}^0 \to l^- X$

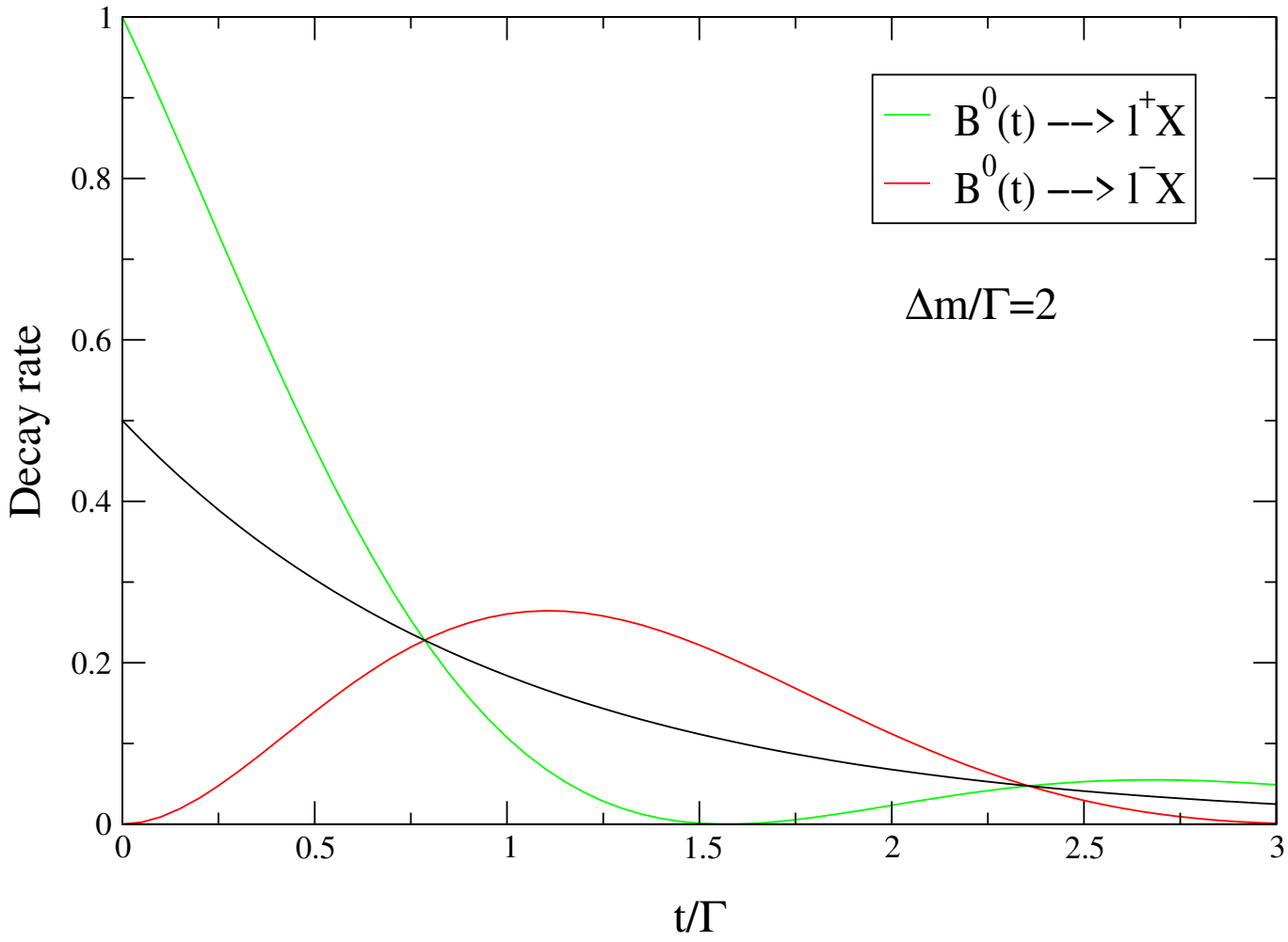
時間の関数としての崩壊確率

$$\Gamma(B^0(t) \to l^+ X) \propto e^{-\Gamma t}(1 + \cos \Delta m\, t)$$
$$\Gamma(B^0(t) \to l^- X) \propto e^{-\Gamma t}(1 - \cos \Delta m\, t)$$

$$r \equiv \frac{\int dt \Gamma(B^0(t) \to l^- X)}{\int dt \Gamma(B^0(t) \to l^+ X)} \simeq \frac{x^2}{2 + x^2} \qquad x \equiv \frac{\Delta m}{\Gamma}$$

$(e^+e^- \to Z^0 \to B^+ \bar{B}^0 X,\ p\bar{p} \to B^+ \bar{B}^0 X)$

Flavor specific decay



Bファクトリー:

$e^+e^- \to \Upsilon(4S) \to B^0_d \bar{B}^0_d \to (l^+l^+, l^-l^-, l^+l^-)X$

波動関数: $C = -1$

$|\Phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|B^0(t), \mathbf{k}\rangle |\bar{B}^0(t), -\mathbf{k}\rangle - |\bar{B}^0(t), \mathbf{k}\rangle |B^0(t), -\mathbf{k}\rangle \right)$

$$R \equiv \frac{N_{++} + N_{--}}{N_{+-}} \simeq \frac{x_d^2}{2 + x_d^2}$$

実験データ

$\underline{B_d}$

$x_d = 0.723 \pm 0.032,\ \Delta m_d = 0.464 \pm 0.018\,\mathrm{ps}^{-1}$

($\tau_{B_d} = 1.56 \pm 0.04\,\mathrm{ps}$、崩壊するまでに 1 回程度振動)

$\Rightarrow |V_{td}|$ の測定: $M_{12}(B_d) \propto (V_{tb}V_{td}^*)^2 = \lambda^6 A^2 (1-\rho+i\eta)^2$

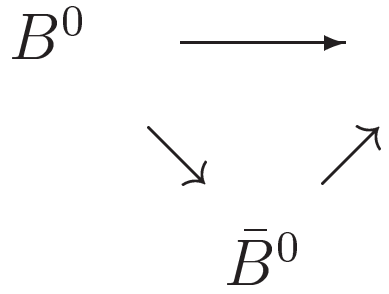
$\underline{B_s}$

$x_s > 14.0,\ \Delta m_s > 9.1\mathrm{ps}^{-1}$ (速い振動)

5. B 中間子崩壊での CP の破れ：角度の測定

B^0–$\bar{B}^0$ 混合による CP の破れ

- B^0 と $\bar{B}^0$ の共通の崩壊モード $\Rightarrow$ 2 つの崩壊過程が可能



$$\langle f|B^0(t)\rangle = g_+(t)A + \frac{q}{p}g_-(t)\bar{A}, \quad A \equiv \langle f|B^0\rangle,\ \bar{A} \equiv \langle f|\bar{B}^0\rangle$$

$$\Gamma(B^0(t) \to f) = |\langle f|B^0(t)\rangle|^2$$

$$|g_\pm(t)|^2 = \frac{e^{-\Gamma t}}{2}(1 \pm \cos\Delta m\, t),\ g_\pm(t)g_\mp^*(t) = \pm i\frac{e^{-\Gamma t}}{2}\sin\Delta m\, t$$

$$\Gamma(B^0(t) \to f) = \frac{|A|^2}{2}e^{-\Gamma t}\Big[1 + |\lambda_f|^2 + (1 - |\lambda_f|^2)\cos\Delta m\, t + 2\mathrm{Im}\lambda_f \sin\Delta m\, t\Big]$$

$$\lambda_f \equiv \frac{q}{p}\frac{\bar{A}}{A}$$

$$\Gamma(\bar{B}^0(t) \to f) = \left|\frac{p}{q}\right|^2 \frac{|A|^2}{2}e^{-\Gamma t}\Big[1 + |\lambda_f|^2 - (1 - |\lambda_f|^2)\cos\Delta m\, t - 2\mathrm{Im}\lambda_f \sin\Delta m\, t\Big]$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\lambda_f$ の測定

Bファクトリー: $t = 0,\ \Upsilon(4S) \to B^0\bar{B}^0$

崩壊振幅: $B(\mathbf{k}) \to f_1$ at $t = t_1$, $B(-\mathbf{k}) \to f_2$ at $t = t_2$

$$A(f_1, f_2; t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\langle f_1|B^0(t_1), \mathbf{k}\rangle\langle f_2|\bar{B}^0(t_2), -\mathbf{k}\rangle - \langle f_1|\bar{B}^0(t_1), \mathbf{k}\rangle\langle f_2|B^0(t_2), -\mathbf{k}\rangle]$$

一方をタグ

$f_1 = \bar{B}^0,\ f_2 = f(e.g.\ \psi K_s), t_1 + t_2$ で積分 $(\tau \equiv t_2 - t_1)$

$$\Gamma(\bar{B}^0, f; \tau) = \frac{|A|^2}{2} e^{-\Gamma|\tau|} \left[1 + |\lambda_f|^2 + (1 - |\lambda_f|^2) \cos \Delta m \tau \right.$$
$$\left. + 2\mathrm{Im}\lambda_f \sin \Delta m \tau \right]$$

$f_1 = B^0,\ f_2 = f$

$$\Gamma(B^0, f; \tau) = \left| \frac{p}{q} \right|^2 \frac{|A|^2}{2} e^{-\Gamma|\tau|} \left[1 + |\lambda_f|^2 - (1 - |\lambda_f|^2) \cos \Delta m \tau \right.$$
$$\left. - 2\mathrm{Im}\lambda_f \sin \Delta m \tau \right]$$

対称コライダー: 崩壊時刻を測定できない。
$\Rightarrow \tau$ で積分することになる。

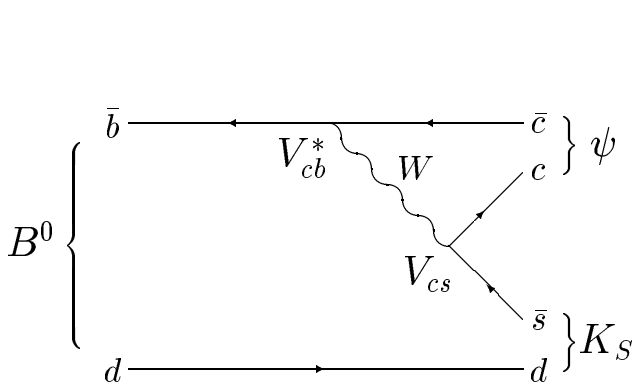
$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-\Gamma|\tau|} \sin \Delta m \, \tau = 0$$

CP 非対称性が消える！

非対称コライダー: $B^0 \bar{B}^0$ が走っている。
崩壊位置 (バーテックス) = 崩壊時刻
$\Rightarrow$ 時間依存性から CP 非対称性を見ることができる。

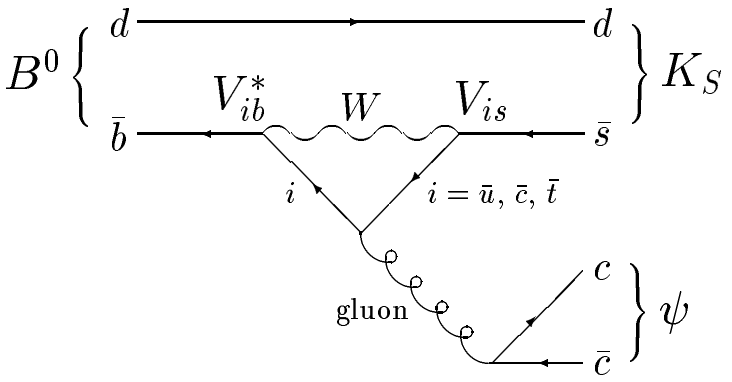
例: $B \to J/\psi K_S$ $(BR \sim 10^{-4})$ による ϕ_1 の測定

tree



$$\sim V_{cb}^* V_{cs}$$

penguin



$$\sim V_{tb}^* V_{ts} F_t + V_{cb}^* V_{cs} F_c + V_{ub}^* V_{us} F_u$$

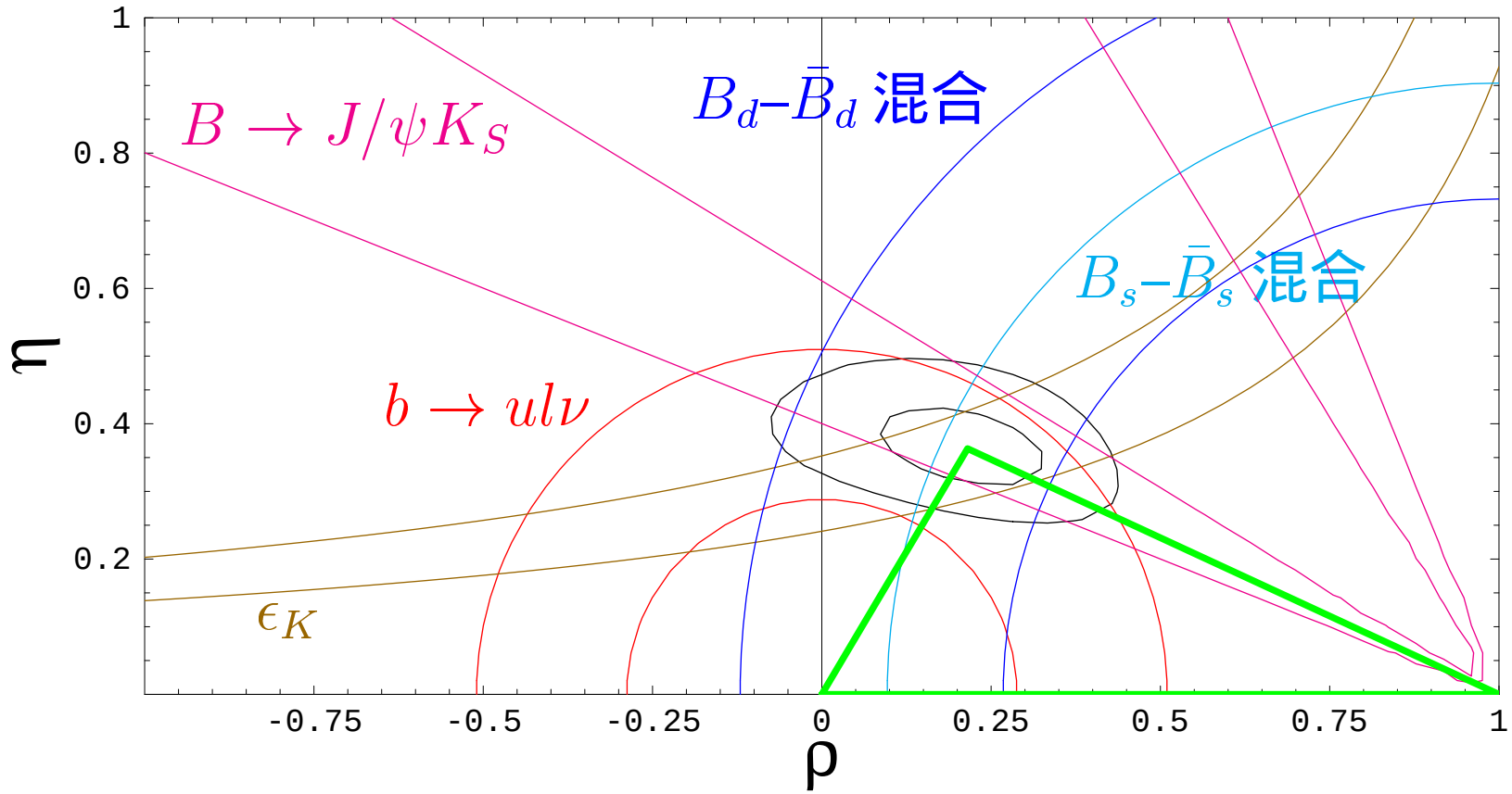
$$\simeq V_{cb}^* V_{cs} (F_c - F_t)$$

$$\frac{\bar{A}}{A} = + \frac{V_{cb} V_{cs}^*}{V_{cb}^* V_{cs}} = +1 \;\Rightarrow\; \lambda_{\psi K_S} = + e^{-2i\phi_1}$$

実験データ

$$\sin 2\phi_1 = \begin{cases} 0.79 \pm 0.44 & \text{CDF (Fermi Lab.)} \\ 0.99 \pm 0.14 \pm 0.06 & \text{Belle (KEK)} \\ 0.59 \pm 0.14 \pm 0.05 & \text{BaBar (SLAC)} \end{cases}$$

6. まとめ


$B \to J/\psi K_S$
B_d–$\bar{B}_d$ 混合
B_s–$\bar{B}_s$ 混合
$b \to ul\nu$
ϵ_K
1
0.8
0.6
0.4
0.2
η
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
0.75
1
ρ

ユニタリティートライアングルは閉じている！
$\Rightarrow V_{KM}$ でクォーク混合、CP の破れが説明できている。

- 将来の展望

$|V_{td}|$ の決定精度が良くない。
$\Rightarrow B_s$–$\bar{B}_s$ 混合の測定が必要。Tevatron (Fermi Lab.) での実験
$\Rightarrow K^+ \to \pi^+ \nu\bar{\nu}$ (分岐比 $\sim 10^{-10}$) との関係。

ϕ_2、ϕ_3 の精密測定は現在の実験では難しいが標準模型を越える新しい物理の研究には必要。
$\Rightarrow$ スーパー B ファクトリー計画

• 説明できなかったこと

強い相互作用の定量的な理解が理論計算の精度を決定する。
$\Rightarrow$ QCD のより深い理解、大規模シミュレーションが必要。

標準模型を越える新しい物理は B 中間子の物理に影響を及ぼす。
例: 超対称理論のボックスダイグラム
内線のクォーク、W 粒子 $\Rightarrow$ スカラークォーク、ゲージーノ

$\Rightarrow$ ユニタリティートライアングルの精密測定や B 中間子の稀崩壊により新しい物理の効果を検出する可能性がある。