2013/8/5

熱学・統計力学要論 (田中担当クラス) 試験問題

1. n モルの理想気体について次のようなサイクルを考える．まず，状態 A(V_A, p_A) から状態 B(V_B, p_B) に断熱自由膨張 $(V_A < V_B)$ させる．ついで，状態 B から状態 C(V_A, p_B) へ準静的等圧過程によって圧縮する．さらに，状態 C から状態 A(V_A, p_A) に準静的等積過程で戻る．(これをマイヤーのサイクルという．)

   (a) このサイクルを V–p 平面上に図示せよ．ただし，準静的でない部分は，(V-p 平面上の点で状態を表わせないから，) 点線で書くこと．

   (b) 理想気体の内部エネルギーは温度のみの関数である．状態 A の温度 T_A と状態 B の温度 T_B の関係は，$T_A > T_B$，$T_A = T_B$，$T_A < T_B$ のどれか．

   (c) B→C で，気体がされた仕事，および気体の吸熱量を求めよ．(理想気体の等圧熱容量 C_p は定数で，これを用いよ．)

   (d) C→A で，気体がされた仕事，および気体の吸熱量を求めよ．(理想気体の等積熱容量 C_V は定数で，これを用いよ．)

   (e) 以上の結果を用いて，熱力学の第 1 法則からマイヤーの関係式を導け．

2. 低熱源の温度が 0°C = 273 K で効率が 20%のカルノー機関がある．

   (a) 高熱源の温度は摂氏何度か．

   (b) 効率を 2 倍にするには，高熱源の温度を摂氏何度にする必要があるか．

3. 温度 T_1 の環境中に，熱容量 C，温度 $T_0(< T_1)$ の物体を置く．しばらくすると物体の温度が T_1 となる．C は温度に依らない定数とする．

   (a) 物体のエントロピーの変化を求めよ．これは正か，負か．

   (b) 環境の温度は不変であるが，環境は熱を失なう．環境のエントロピーの変化を求めよ．これは正か，負か．

   (c) 全系のエントロピーの変化を求め，エントロピーが増大していることを示せ．

4. 伸ばしたひも状のゴムについて考える．ゴムの長さを $x(>0)$，断面積を a として，a は一定とする．また，温度 T でのゴムのばね定数を $k(T)$ とする．ゴムの体積は $V=ax$，圧力は $p=p_0-k(T)x/a(<0)$ と書ける．(p_0 は定数．)

   (a) (手を離すなどして) 外力のない状態にするとゴムは自然に縮むので，エントロピー増大則から，

   $$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_T<0$$

   と考えられる．マクスウェルの関係式

   $$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

   を用いて，ゴムのばね定数 $k(T)$ が温度の増加関数であることを示せ．

   (b) 断熱的にゴムを伸ばすと温度は上昇するか，下降するか．(ヒント: マクスウェルの関係式 $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S=-\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$ を用いよ．)

5. 重力加速度 g の一様重力中の単原子分子理想気体について考える．気体は，1 辺の長さが a の正方形を底面とする高さ h の直方体容器に入っていて，温度が T の平衡状態にある．系のエネルギーは，

   $$E(q,p)=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}+mgz_i\right)$$

   と書ける．ここで，z_i は i 番目の粒子の位置 $\boldsymbol{q}_i$ の z 成分で，$0\le z_i\le h$ である．分配関数は

   $$Z=\frac{1}{N!}\int e^{-\beta E(q,p)}\,\frac{d^3q_1\cdots d^3q_N d^3p_1\cdots d^3p_N}{(2\pi\hbar)^{3N}}$$

   で与えられる．ただし，$\beta=1/(k_BT)$ である．

   (a) 分配関数が，

   $$Z=\frac{1}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}dp\right)^{3N}\left(a^2\int_0^h e^{-\beta mgz}dz\right)^N \tag{1}$$

   と書けることを示せ．

   (b) 式 (1) に現われる p 積分

   $$\int e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}dp$$

   を求めよ．

   (c) さらに，式 (1) の z 積分を実行して，分配関数 Z の表式を求めよ．

   (d) 前問の結果から，エネルギーの期待値を求めよ．

   (e) $\beta mgh\ll 1$ であるような高温での定積熱容量を求めよ．

   (f) 逆に，$\beta mgh\gg 1$ であるような低温での定積熱容量を求めよ．