

熱学・統計力学要論(田中担当クラス) 試験問題

1. 1気圧で, 0°C (= 273 K), 1 g の氷が, 水蒸気になるときのエントロピーの変化について考える。(数値は有効数字2桁で答えよ.)
 - (a) 0°C で氷から水になるときのエントロピーの変化を求めよ。ただし, 1気圧での1gの水の融解熱を 330 J とする。
 - (b) 0°C , 1gの水が, 100°C の水になるときのエントロピーの変化を求めよ。ただし, 1気圧での1gの水の熱容量を 4.2 J/K とする。($\log(373/273) \simeq 0.31$ とせよ。)
 - (c) 100°C で水から水蒸気になるときのエントロピーの変化を求めよ。ただし, 1気圧での1gの水の気化熱を 2300 J とする。
2. 温度 T_0 の環境中に, 熱容量 C , 温度 $T_1 (> T_0)$ の物体がある。(C は定数とする。) この状況から取り出せる最大の仕事を求めたい。最大の仕事をとり出す一つの方法は, 物体を高温熱源, 環境を低温熱源とするカルノー機関を用いることである。ただし, 仕事をするにつれ, 物体の温度が下がることを考慮しなければならない。
 - (a) 物体の温度が $T(T_0 < T < T_1)$ のときのカルノーサイクルの効率 η_c を書け。(答のみでよい。)
 - (b) 物体が微小な熱 $\Delta Q (> 0)$ を失なうときに, カルノー機関がする仕事 $\Delta W (> 0)$ を求めよ。
 - (c) このときの温度の低下 $\Delta T (< 0)$ と ΔQ の関係を示せ。(符号に注意。)
 - (d) 上の結果から, 取り出せる最大の仕事, つまり物体の温度が T_1 から T_0 まで変化する際にカルノー機関がする仕事を求めよ。
3. ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, V, N)$ について考える。
 - (a) λ 倍した流体を考え, F の示量性を表す式を書け。
 - (b) 問3aで得られた式を λ で微分し, $\lambda = 1$ と置くことで, F, V, P, N, μ の間に成り立つ(微分を含まない)関係式を導け。
 - (c) 問3bで得られた式の全微分を考え, $dT, dP, d\mu$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

4. カノニカル分布

$$\mathcal{P}^{(C)}(q, p) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(q, p)}, \quad Z = \int e^{-\beta E(q, p)} d\Gamma, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

について考える。

- (a) エネルギーの期待値が

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$

と表わされることを示せ。

- (b) エネルギーの分散 $V_E \equiv \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ が

$$V_E = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z$$

と表わされることを示せ。

- (c) 上の結果を用いて, 熱容量 C と V_E の関係を導け。