2015/8/6

熱学・統計力学要論 (田中担当クラス) 試験問題

1. 熱的接触におけるエントロピーの変化について考える．(定積) 熱容量 C は

$$C(T,V) = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \tag{1}$$

と表わされる．

   (a) 以下では，$C(T,V)$ が温度に依らない場合，つまり $C(T,V) = C_0(V)$ と書ける場合について考える．式 (1) を用いて，エントロピー $S(T,V)$ の T 依存性を決定せよ．ただし，基準となる温度 T_0 で $S(T_0,V) = S_0(V)$ とする．

   (b) 体積 V の同じ物体が 2 つあり，温度がそれぞれ T_1，$T_2(\neq T_1)$ である．全エントロピーを求めよ．

   (c) 全体を断熱した上で，上の 2 つの物体を熱的に接触させる．このとき，体積の変化は無いものとする．平衡状態に達した時の温度を求めよ．

   (d) 上の過程でのエントロピーの変化を求めよ．

   (e) エントロピーは増大したか，減少したか．

2. ある流体のエントロピーが，$S(U,V) = (4a/3)U^{3/4}V^{1/4}$ で与えられている．ただし，$a(>0)$ は示強的な定数である．

   (a) この $S(U,V)$ が示量性を持つことを示せ．

   (b) 温度 T を U,V の関数として求め，内部エネルギー U を T,V で表わせ．

   (c) この流体の状態方程式を導け．

   (d) この流体のヘルムホルツの自由エネルギー $F(T,V)$ を求めよ．

   (e) この流体は何か．

3. 質量 m の単原子分子 N 個からなる体積 V の理想気体を考える．エネルギーは $E(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i^2/2m$ である．

   (a) ($N!$ で割った) 状態数

$$\Omega(E,V,N) = \frac{1}{N!}\int_{E(q,p)\le E} d\Gamma = \int_{E(q,p)\le E} \frac{d^3q_1\cdots d^3q_N d^3p_1\cdots d^3p_N}{(2\pi\hbar)^{3N}N!}$$

   を求めよ．
   (ヒント: d^3q 積分は 1 つにつき V を与える．n 次元単位球の体積は $\pi^{n/2}/\Gamma((n/2)+1)$ である．)

   (b) ボルツマン公式 $S = k_B \log W \simeq k_B \log \Omega$ を用いてエントロピー $S(E,V,N)$ を求めよ．ただし，$N \gg 1$ として，スターリングの公式 $\log N! \simeq N\log N - N$ を用いよ．
   (ヒント: $\Gamma(n+1) = n!$．)

   (c) 上で求めたエントロピーが示量性を持つことを示せ．