2015/7/27 出題

熱学・統計力学要論 (田中担当クラス) 宿題 10

提出期限: 8/3 の授業時に集める.

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. Γ 関数を $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\ (x>0)$ で定義する. 以下の関係を示せ.

$$\Gamma(1)=1\,,\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}\,,\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\,,\quad \Gamma(n+1)=n!\ (n=\text{正の整数})\,.$$

2. 半径 a の n 次元球の体積 $V_n(a)=\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\le a^2}dx_1dx_2\cdots dx_n$ を求めよう.
   (a) 変数変換により, $V_n(a)=C_n\,a^n$ と書けることを示せ. ここで, $C_n\equiv V_n(1)$ は定数である.
   (b) 半径 a の n 次元球の表面積は,
   $$\lim_{\delta a\to 0}\frac{V_n(a+\delta a)-V_n(a)}{\delta a}=\frac{d}{da}V_n(a)=nC_n\,a^{n-1}$$
   である. 積分 $I_n\equiv\int dx_1dx_2\cdots dx_n e^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$ (積分範囲は全空間) を (n 次元) 球座標で評価すると $I_n=C_n\Gamma((n/2)+1)$ となることを示せ.
   (c) I_n を (n 次元) デカルト座標で評価せよ. (ヒント: ガウス積分の公式を用いる.)
   (d) 上の結果から, C_n を決定せよ.

3. スターリングの公式, $\log n!=n\log n-n+o(n)\ (n\gg 1)$ を導出しよう.
   (a) 次の不等式が成り立つことを示せ.
   $$\int_{k-1}^{k}\log x\,dx\le\log k\le\int_k^{k+1}\log x\,dx\,,\quad k\ge 1$$
   (b) この不等式の $k=1$ から $k=n$ までの和を考え, 積分を実行することで, スターリングの公式を導け.

解答