

熱学・統計力学要論(田中担当クラス) 試験問題

1. 以下の問いに答えよ.

(a) ヘルムホルツの自由エネルギー $F(T, V)$ の微分を考え, マクスウェルの関係式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$

を示せ.

(b) 上の結果を用いて, エネルギー方程式を導け.

(c) 状態方程式が $P = f(V)T$ で表わされる物質を考える. $f(V)$ は体積 V のみの関数である. 内部エネルギー $U(T, V)$ が, V に依存しないことを示せ.

2. 温度 T_0 の環境中に熱容量 C , 温度 T_0 の物体が置かれている. この物体を温度 $T_1 (< T_0)$ に冷却するのに必要な最小の仕事を求めたい. そのためには, 物体を低温熱源, 環境を高温熱源とするカルノー逆機関を考えればよい. (以下では, 物体の体積は変化しないものとする.)

(a) 物体の温度が $T (T_1 < T < T_0)$ のとき, 力学装置がカルノー逆機関に微小な仕事 $\Delta W (> 0)$ をし, 物体から微小な熱 $\Delta Q (> 0)$ が奪われ, 環境に $\Delta Q_0 (> 0)$ の熱が放出される. $\Delta W, \Delta Q, \Delta Q_0$ の関係を示せ.

(b) カルノーの定理から, $\Delta Q/T = \Delta Q_0/T_0$ であることを示せ.

(c) $\Delta Q (> 0)$ の熱が奪われたことにより, 物体の温度が $\Delta T (< 0)$ だけ変化する. ΔW と ΔT の関係を求めよ. (符号に注意.)

(d) 上の結果から, 冷却に必要な最小の仕事, つまり物体の温度が T_0 から T_1 まで変化する際に力学装置がカルノー逆機関にする仕事を求めよ. ただし, C は定数とする.

(e) 気温 27°C の室内で, 1 g の氷を作るために必要な最小の仕事を求めよ. ただし, 1 g の水の熱容量を 4.2 J/K , 1 g の氷の融解熱を 334 J とし, 有効数字 2 桁で答えよ. (ヒント: $\log(300/273) = 0.0943$)

3. N 個の質量 m , 角振動数 ω の 3 次元調和振動子の集団についてミクロカノニカル分布で考える. エネルギーは,

$$E(q, p) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right)$$

である.

(a) 状態数

$$\Omega(E, N) = \int_{E(q,p) \leq E} d\Gamma = \int_{E(q,p) \leq E} \frac{d^3 q_1 \cdots d^3 q_N d^3 p_1 \cdots d^3 p_N}{(2\pi\hbar)^{3N}}$$

を求めよ. (ヒント: 変数変換により $6N$ 次元の球の体積に帰着させよ. また, $2n$ 次元単位球の体積は $\pi^n/n!$ である.)

(b) ボルツマン公式 $S = k_B \log W \simeq k_B \log \Omega$ を用いて, エントロピーを求めよ. ただし, $N \gg 1$ として, スターリングの公式 $\log N! \simeq N \log N - N$ を用いよ.

(c) 上で求めたエントロピーが示量性を持つことを示せ.

(d) 内部エネルギー E と温度の関係を求めよ.