2017/8/7

熱学・統計力学要論 (田中担当クラス) 試験問題

1. 地表における太陽エネルギーの利用に対する熱力学からの制約について考える．太陽の表面温度を T_S とすると，太陽は温度 T_S の熱源と見做せる．(大気の影響等は無視する．)

   (a) 仮に太陽を直接的に熱源として利用できるとして，太陽と地表環境 (温度 T_E) を 2 つの熱源とする熱機関の効率の最大値を求めよ．ただし，$T_S = 5800$ K，$T_E = 290$ K とする．

   (b) 実際には，地表に置いた物体 A を太陽により温めて，これを熱源として利用することになる．鏡やレンズを用いて，物体 A の温度 T_A を T_S より高くすることは可能か不可能か．その理由も述べよ．

2. 温度 T，体積 V の空洞容器を考える．空洞内壁での電磁波 (光子) の放出・吸収により，電磁場の平衡状態が実現され，これを温度 T の光子気体と呼ぶ．光子の数 N は放出・吸収のため定まっていないので，平衡状態を記述する状態変数とならない．従って，示量性から，光子気体の内部エネルギーは，$U(T, V) = Vu(T)$ と書ける．ただし，$u(T)$ は単位体積当りの内部エネルギー，つまり内部エネルギー密度である．一方，Maxwell 方程式から，電磁場の圧力は，$P(T, V) = u(T)/3$ である．

   (a) エネルギー方程式を用いて，$u(T) = (aT)^4$ (a は定数) となることを示せ．

   (b) 等温準静的熱 $Q[T, V_1 \xrightarrow{\text{iqs}} V_2]$ を求めよ．

   (c) (定積) 熱容量 $C(T, V)$ を求めよ．

   (d) 断熱曲線の微分方程式
   $$\frac{dT}{dV} = -\frac{T}{C}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$
   を用いて，断熱曲線が $T^3 V = b$ (b は定数) となることを示せ．

   (e) 基準となる断熱曲線として $b = 0$，つまり $V_0(T) = 0$ をとり，エントロピー $S(T, V)$ を求めよ．ただし，$S(0, 0) = 0$ とする．

   (f) 完全な熱力学関数としてのエントロピー $S(U, V)$ を求めよ．

裏面につづく

3. 固体のモデルとして，N 個の質量 m，角振動数 ω の 3 次元調和振動子の集団についてカノニカル分布で考える．エネルギーは，

$$E(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \boldsymbol{q}_i^2 \right)$$

である．

(a) まず準備として，ガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0 \tag{1}$$

を導け．

(b) 分配関数は

$$Z = \int e^{-\beta E(q,p)} \frac{d^3q_1 \cdots d^3q_N d^3p_1 \cdots d^3p_N}{(2\pi\hbar)^{3N}}$$

で与えられる．ただし，$\beta = 1/(k_BT)$ である．式 (1) を用いて Z を求めよ．

(c) ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ．

(d) 上で求めたヘルムホルツの自由エネルギーが示量性を持つことを示せ．

(e) エントロピーを求めよ．

(f) 内部エネルギーを求めよ．