1. 導入

☆ やること

- 量子力学入門
- 特殊相対論入門
- 数学（線形代数、基礎解析）を勉強する動機づけ、演習

☆ 量子力学

量子力学 ⟷ 古典力学

全然違う!!

（力学の授業で習う）

① ②

この講義でやること

① 量子力学は何か？

定式化に使う数学：（複素）線形代数

② 古典力学がどう出てくるか？
（時間があれば）

☆ 特殊相対論

⤳ 時間、空間の概念の変更
絶対時間はない!!

→ いろんな不思議な現象
走っている時計のおくれ
⋮ ものの収縮
⋮

□ 原理の1つ：光の速さはどの慣性系から見ても同じ

↑
電磁波 ← $\boxed{\text{波動方程式}}$ に従う
↑
Maxwell方程式

波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi(x,t) = 0$$

目標：

① 式の意味が分かる

② 自在に式変形ができる

③ 波動方程式を不変 ⤳ Lorentz変換

2. 数学の準備その1

☆ 複素数

$\mathbb{R}$ ： 実数全体

$z = x + iy$ ，（ $x, y \in \mathbb{R}$
i ： 形式的な記号
「虚数単位」
$i^2 = -1$ ）

複素数

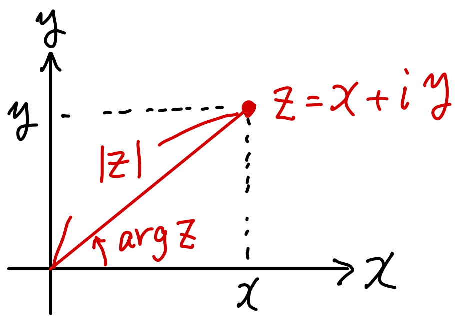
□ 四則演算

たし算、ひき算、かけ算、(0以外での)割り算 がある。

□ 絶対値、偏角

$z = x + iy \Rightarrow |z| := \sqrt{x^2 + y^2}$

$(z \neq 0)$ $\arg z$ ： 下の絵の角度



オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$z = re^{i\theta}, \quad r, \theta \in \mathbb{R}, \quad r > 0$$

$$\Rightarrow \quad |z| = r, \quad \arg z = \theta$$

※ $\arg z$ は $2\pi \times$(整数)の不定性がある。

成り立つ式

$z, w \in \mathbb{C}$

- $|zw| = |z||w|$
- $\arg(zw) = \arg z + \arg w$
- $w \neq 0, \ \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
- $\arg z^{-1} = -\arg z$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

□ 複素共役

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad z^* := x - iy \quad 「複素共役」$$

- $|z|^2 = z^* z$
- $\arg z^* = -\arg z$
- $|z| = |z^*|$
- $(zw)^* = z^* w^*$
- $(z+w)^* = z^* + w^*$

☆ ベクトル空間

スカラー = 複素数 $\mathbb{C}$

「(列)ベクトル」 $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$ $v_1, \cdots, v_N \in \mathbb{C}$

※ ベクトルを表すのに $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$
記号(ケット)もよく用いる。

$$\mathbb{C}^N := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \middle| \ v_1, \cdots, v_N \in \mathbb{C} \right\}$$ 「ベクトル空間」(の例)

N :「次元」, $v_1, \cdots, v_N$: 成分

□ 重要な構造

- たし算 $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$, $|w\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$

$$|v\rangle + |w\rangle := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_N + w_N \end{pmatrix}$$

- スカラー倍

$a \in \mathbb{C}$, $a|v\rangle := \begin{pmatrix} a v_1 \\ \vdots \\ a v_N \end{pmatrix}$

□ 1次独立

$|f_1\rangle, \cdots, |f_K\rangle \in \mathbb{C}^N$ が「1次独立」

$$\Longleftrightarrow \left(a_1, \cdots, a_K \in \mathbb{C},\ a_1|f_1\rangle + \cdots + a_K|f_K\rangle = 0 \quad \Updownarrow \quad a_1 = \cdots = a_K = 0 \right)$$

例 $|f_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|f_2\rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1次独立

$$\left(\because\ a_1|f_1\rangle + a_2|f_2\rangle = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Updownarrow \quad a_1 = a_2 = 0 \right)$$

例 $|f_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|f_2\rangle = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$ は 1次独立でない（「1次従属」）

$$\left(\because\ a_1 = 1,\ a_2 = i \Rightarrow a_1|f_1\rangle + a_2|f_2\rangle = 0 \right)$$

□ 基底

$$|i\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} < i \text{番目} \quad , \quad i = 1, \cdots, N$$

$\Rightarrow {}^{\forall}|v\rangle \in \mathbb{C}^N$ は $|v\rangle = v_1|1\rangle + v_2|2\rangle + \cdots + v_N|N\rangle$

$v_i \in \mathbb{C}$

と一意的に書ける

一般に（上のものに限らず）

$|f_i\rangle, \ i = 1, \cdots, N$

s.t. ${}^{\forall}|v\rangle \in \mathbb{C}^N$ が

$|v\rangle = \sum_{i=1}^{N} \tilde{v}_i |f_i\rangle \quad \tilde{v}_i \in \mathbb{C}$ と一意的に書ける

$\Updownarrow$

$|f_i\rangle, i = 1, \cdots, N$ は「基底」

例: $\mathbb{C}^2$, $|f_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|f_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は基底

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)|f_1\rangle + \frac{1}{2}(v_1 - v_2)|f_2\rangle$$

□ 抽象ベクトル空間

スカラー倍、たし算がある集合

= ベクトル空間

⇒ 有限次元の場合、基底をとることで $\mathbb{C}^N$ に帰着

線形代数の授業で勉強して下さい

> 量子力学で出てくるのは
> かなり抽象的なベクトル空間

※ 抽象化について

例： 自然数

1コのリンゴ，　2コのリンゴ，3コのリンゴ，…

1コのミカン，　2コのミカン，3コのミカン，…

↓ ミカンとかリンゴとかを忘れる

1, 2, 3, …　　⇒ ミカンでもリンゴでも…成り立つ性質

例： ベクトル空間 ： たし算とスカラー倍がある。

- 矢印
- 列ベクトル
- 量子力学の状態 ← New

☆ 行列

長方形の形に数をならべたもの

例 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1+i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ (3行2列の行列)

スカラー倍、たし算、かけ算 (線形代数の授業でやったとおり)

以下、行の数と列の数が等しい行列(「正方行列」)と列ベクトル、行ベクトルのみあつかう

$\begin{pmatrix} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{pmatrix}$ $\quad$ $(\circ \cdots \circ)$

$N \times N$ 行列 $\hat{A}$ は $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ の線形写像とみなせる

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{A}|v\rangle = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_N' \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

(主に物理で使われる用語)

「演算子」

演算子(行列)は $\hat{A}$ のように ^ をつけて表すことがある.

☆ エルミート内積

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

$$\langle w | v \rangle := w_1^* v_1 + w_2^* v_2 + \cdots + w_N^* v_N \in \mathbb{C}$$

「標準エルミート内積」

特に $\langle v | v \rangle = v_1^* v_1 + v_2^* v_2 + \cdots + v_N^* v_N$

$= |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 = \|v\|^2$

□ 性質

$u, v, w \in \mathbb{C}^N, \quad a, b, c \in \mathbb{C}$

(1) $\langle w | u + v \rangle = \langle w | u \rangle + \langle w | v \rangle$

(2) $\langle w + u | v \rangle = \langle w | v \rangle + \langle u | v \rangle$

(3) $\langle w | a v \rangle = a \langle w | v \rangle$

(4) $\langle a w | v \rangle = a^* \langle w | v \rangle$

(5) $\langle w | v \rangle = \langle v | w \rangle^*$

(6) $\langle v | v \rangle \geq 0$, 等号 $\Leftrightarrow$ $v = 0$

一般に（標準エルミート内積でなくても）

上の (1)−(6) を満たす $\langle \ | \ \rangle : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$

「エルミート内積」

正規直交基底

クロネッカーデルタ

$e_1, \cdots, e_N \in \mathbb{C}^N$ で $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

抽象ベクトル空間でも (1)−(6)を満たすエルミート内積を考えることができる. 有限次元なら正規直交基底をとることで今の場合に帰着

ブラケット

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N \quad (\text{ケットベクトル})$$

$$\longrightarrow \overset{\text{記号}}{} \langle v| := (v_1^* \ v_2^* \ \cdots \ v_N^*) \quad (\text{ブラベクトル})$$

$\Rightarrow$ $\langle w|v\rangle$ は $\langle w|$ と $|v\rangle$ の行列の積と思える.

(名前の由来: 〈 〉括弧を英語でブラケット (bra-ket))

演算子をはさむ

$\hat{A}$: $N \times N$ 行列 (演算子)

$$\langle w|\hat{A}|v\rangle = (w_1^* \cdots w_N^*) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$$

後ろを先にかける

$$\hat{A}v =: v' = \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_N' \end{pmatrix}$$

$$\langle w|\hat{A}|v\rangle = (w_1^* \cdots w_N^*) \begin{pmatrix} v_1' \\ \vdots \\ v_N' \end{pmatrix} = \langle w|v'\rangle$$

$$\langle w|\hat{A}|v\rangle = \langle w|\hat{A}v\rangle$$

前を先にかける $\langle w|\hat{A} = ?$

□ エルミート共役

$\hat{A}$：演算子

⇒ $\boxed{\text{「エルミート共役」}}$ $\hat{A}^{\dagger}$ ←「ダガー」と読む を次で定義

$$\boxed{\begin{array}{l} {}^{\forall} v, w \in \mathbb{C}^{N} \\ \qquad \langle w | \hat{A} v \rangle = \langle \hat{A}^{\dagger} w | v \rangle \end{array}}$$

$\hat{A}^{\dagger}$ はどんな行列？

$\hat{A} = (a_{ij})$ （$\hat{A}$ の i 行 j 列成分が a_{ij}）

$\hat{A}^{\dagger} = (b_{ij})$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{N1} & \cdots & \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{\dagger} w =: w' = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_N \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad w'_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij} w_j$$

$\hat{A}$ と $\hat{A}^{\dagger}$ の関係

$$\langle w | \hat{A} = \langle \hat{A}^{\dagger} w | = (u_1 \ \cdots \ u_N)$$

(左辺) → $u_i = \sum_{j=1}^{N} w_j^{*} a_{ji}$

(右辺) → $u_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}^{*} w_j^{*}$

${}^{\forall} w$ に対して

$$\Rightarrow \quad a_{ji} = b_{ij}^{*} \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = a_{ji}^{*}$$

$$\boxed{\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^T)^*}$$

$\hat{A}^T$ の ij成分

$\hat{A}^T$: 転置 (行と列を入れかえる)　$(\hat{A}^T)_{ij} = a_{ji}$

$\hat{A}^*$: 成分ごとに複素共役　$(\hat{A}^*)_{ij} = a_{ij}^*$

$$\boxed{(\hat{A}^\dagger)_{ij} = a_{ji}^*}$$

例: $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2i \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & -2i \end{pmatrix}$

* * * *

○ 公式

- $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$
- $(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$
- $a \in \mathbb{C}$　$(a\hat{A})^\dagger = a^* \hat{A}^\dagger$

∘ $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$

$\because$ $\langle w | \hat{A}\hat{B} v \rangle = \langle (\hat{A}\hat{B})^\dagger w | v \rangle$

$= \langle \hat{A}^\dagger w | \hat{B} v \rangle = \langle \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger w | v \rangle$

∘ $\langle w | \hat{A} | v \rangle^* = \langle v | \hat{A}^\dagger | w \rangle$

$\because$ $(\text{左辺}) = \langle w | \hat{A} v \rangle^* \underset{\uparrow\ \dagger\text{の定義}}{=} \langle \hat{A}^\dagger w | v \rangle^* \underset{\uparrow\ \text{内積の性質(5)}}{=} \langle v | \hat{A}^\dagger w \rangle = (\text{右辺})$

□ エルミート行列（演算子）

$\hat{A}$ がエルミート（行列）（演算子）

$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \hat{A}^\dagger = \hat{A}$

$\hat{A}$ がエルミート $\Rightarrow$ ${}^\forall v \in \mathbb{C}^N$, $\langle v|\hat{A}|v\rangle \in \mathbb{R}$

□ ユニタリー行列（演算子）

$\hat{U}$ がユニタリー（行列）（演算子）

$\overset{\text{def.}}{\iff} \quad {}^\forall v, w \in \mathbb{C}^N$, $\langle \hat{U}w|\hat{U}v\rangle = \langle w|v\rangle$

- ユニタリー演算子 ＝ エルミート内積を変えない演算子

- $\hat{U}$ がユニタリー $\iff \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{I}$

"単位行列"
"恒等演算子"

演算子の表示

$|w\rangle\langle v|$ は演算子

- 見方その1 $|w\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{pmatrix} (\circ \cdots \circ) = \begin{pmatrix} \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & & \vdots \\ \circ & \cdots & \circ \end{pmatrix}$

- 見方その2 $|u\rangle$ に当てる

$$\Rightarrow |w\rangle\underbrace{\langle v|u\rangle}_{\in \mathbb{C}} = \langle v|u\rangle\,|w\rangle$$

はケットベクトル

$|j\rangle$, $j=1,\cdots,N$ は正規直交基底として、

$$\sum_{j=1}^{N} |j\rangle\langle j| = \hat{I} \quad (\text{恒等演算子} = \text{単位行列})$$

↑単に 1 と書くことが多い。

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} |j\rangle\langle j| = 1}$$

$|v\rangle = \sum_{j=1}^{N} v_j |j\rangle$ のとき $\langle j|v\rangle = v_j$ 「ベクトルの成分」

$$\hat{A}|v\rangle = \sum_{j=1}^{N} v_j \hat{A}|j\rangle$$

↑これの成分

$$\hat{A}|v\rangle = \sum_{i=1}^{N} v'_i \; |i\rangle$$

$$v'_i = \langle i|\hat{A}|v\rangle = \sum_{j=1}^{N} v_j \underbrace{\langle i|\hat{A}|j\rangle}_{=:a_{ij}}$$

$$v'_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j$$

行列とベクトルのかけ算!!

$$\boxed{a_{ij} = \langle i | \hat{A} | j \rangle \quad \text{「行列要素」}}$$

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} |i\rangle \underbrace{\langle i | \hat{A} | j \rangle}_{a_{ij}} \langle j|$$

$$\boxed{\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} |i\rangle\langle j|}$$

3. 量子力学の定式化

☆ 状態

例: 二重スリット

(間くらい, 右の方, 左の方, …)

ややこしそう

⇓ できるかぎりシンプルで本質が分かる系

例: (Qubit)(キュビット)(量子ビット)

2つの部屋 0, 1 のどちらかにいる粒子

それ以外の自由度(部屋のどこにいるか等)は考えない。

ベクトル $|0\rangle$, $|1\rangle$ で表す.

ベクトル空間 $\mathcal{H} := \{ \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle \mid \psi_0, \psi_1 \in \mathbb{C} \}$

$$\simeq \mathbb{C}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \middle| \psi_0, \psi_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

内積 $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$
$\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$
$\left(\langle g|g'\rangle = \delta_{gg'} \quad g, g' := 0, 1 \right)$

> この系 (Qubit) の状態は $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $|\psi\rangle \neq 0$
> で表される. ただし $^\forall c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ に対して $|\psi\rangle$ と $c|\psi\rangle$
> は同じ状態を表す

$\mathcal{H}$: 「ヒルベルト空間」 (数学用語を流用)

※ $c \in \mathbb{C}$ をかける自由度を使って $\langle \psi|\psi\rangle = 1$ となるようにする (「規格化」「正規化」) ことが多い.

※ 規格化しても、まだ位相 $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ をかける不定性

□ 確率

状態 $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle = |\psi_0|^2 + |\psi_1|^2$

粒子の位置 ($g = 0, 1$) を観測

0 になる確率 $P_0 = \dfrac{|\psi_0|^2}{|\psi_0|^2 + |\psi_1|^2} = \dfrac{|\langle 0|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$

1 〃 $P_1 = \dfrac{|\psi_1|^2}{|\psi_0|^2 + |\psi_1|^2} = \dfrac{|\langle 1|\psi\rangle|^2}{\langle\psi|\psi\rangle}$

※ $P_0 + P_1 = 1$

$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ と規格化した場合、g になる確率 ($g = 0, 1$)

$$P_g = |\langle g|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|g\rangle\langle g|\psi\rangle$$

$\Leftarrow$ $\langle g|\psi\rangle$: (確率) 振幅

((絶対値)^2 が確率になる)

例: $|\psi\rangle = |0\rangle \Rightarrow$ 100% 0 にいる

$|\psi\rangle = |1\rangle \Rightarrow$ 100% 1 にいる

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \Rightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2$

$\langle 0|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow P_0 = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$, $P_1 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

$\theta \in \mathbb{R}$

$|\psi\rangle = \cos\theta\ |0\rangle + \sin\theta\ |1\rangle$

$\Rightarrow \quad \langle\psi|\psi\rangle = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\langle 0|\psi\rangle = \cos\theta \ \Rightarrow\ P_0 = \cos^2\theta$

$\langle 1|\psi\rangle = \sin\theta \ \Rightarrow\ P_1 = \sin^2\theta$

□ 一般の場合

量子力学系 $\Longrightarrow$ $\mathcal{H}$: ヒルベルト空間

(複素ベクトル空間, エルミート内積付き)

> 状態は $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $|\psi\rangle \neq 0$ で表される。
>
> ただし、${}^{\forall}c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ に対して $|\psi\rangle$ と $c|\psi\rangle$ は同じ状態を表す。

※ $\mathcal{H}$ は無限次元であることも多い。
この講義では主に有限次元の $\mathcal{H}$ をあつかう。

観測量? 確率?

□ 観測量（物理量）

量子力学での「観測量」はヒルベルト空間$\mathcal{H}$上のエルミート演算子

状態 $|\psi\rangle$ での観測量 $\hat{A}$ の期待値

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

（ここだけの記号かも）

例： Qubit

$$\mathcal{H} := \{ \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle \mid \psi_0, \psi_1 \in \mathbb{C} \}$$
$$\simeq \left\{ \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{pmatrix} \middle| \psi_0, \psi_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

- $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0にいる？

Yes ⇒ 1

No ⇒ 0

$$\langle \hat{P}_0 \rangle_\psi = \frac{\langle \psi | 0 \rangle \langle 0 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$
$$= P_0 \quad \text{（0にいる確率）}$$

- 同様に $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$ $\langle \hat{P}_1 \rangle_\psi = P_1$ （1にいる確率）

∘ $\hat{q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(= 0 \, \hat{P}_0 + 1 \, \hat{P}_1 \right)$

粒子の位置

$\langle \hat{q} \rangle_\psi = 0 \, P_0 + 1 \, P_1$

∘ $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ $(a_0, a_1 \in \mathbb{R})$

$\hat{A} = \begin{cases} a_0 & (0\text{にいる}) \\ a_1 & (1\text{にいる}) \end{cases}$

$\langle \hat{A} \rangle_\psi = a_0 P_0 + a_1 P_1$

∘ $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $(= \hat{Z}$ と書くこともある$)$

$= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$

∘ $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{P}_0, \hat{P}_1$ で書けていない!?

$(= \hat{X}$ と書くこともある$)$

∘ $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $(= \hat{Y}$ と書くこともある$)$

※ 言葉：

"quantum"

∘ 量子力学の観測量 = エルミート演算子　「q数」

$\Updownarrow$

古典力学の観測量 = 実数　「c数」

"classical"

∘ $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ ：「パウリ行列」

$(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$

□ 確率：対角行列の場合

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$$ （対角行列）の場合 $(a_0 \neq a_1)$

$$= a_0 |0\rangle\langle 0| + a_1 |1\rangle\langle 1|$$

$\hat{A}|0\rangle = a_0|0\rangle \Rightarrow$ $|0\rangle$ という状態では $\hat{A}$ は a_0
$\hat{A}$ を観測すると 100% a_0

$\hat{A}|1\rangle = a_1|1\rangle \Rightarrow$ $|1\rangle$ … a_1

… 100% a_1

a_0, a_1 ： $\hat{A}$ の「固有値」
$|0\rangle$, $|1\rangle$ ：（対応する）「固有ベクトル」

一般の状態

$$|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle$$ ，（$\langle\psi|\psi\rangle = 1$ としておく）

$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$

$$\langle\hat{A}\rangle_\psi = (\psi_0^* \langle 0| + \psi_1^* \langle 1|)\hat{A}(\psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle)$$

$$= (\psi_0^* \langle 0| + \psi_1^* \langle 1|)(a_0\psi_0|0\rangle + a_1\psi_1|1\rangle)$$

$$= a_0|\psi_0|^2 + a_1|\psi_1|^2$$ 確率論の意味での期待値

（$\hat{A}$ が a_0 である確率 $|\psi_0|^2$
a_1 $|\psi_1|^2$）

□ 確率：一般の場合

例：

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{X}|0\rangle = |1\rangle \not\propto |0\rangle \\ \hat{X}|1\rangle = |0\rangle \not\propto |1\rangle \end{array}\right) \Rightarrow$$ $|0\rangle$も$|1\rangle$も$\hat{X}$の値は決まっていない

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1, \quad \langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ $|+\rangle, |-\rangle$ は正規直交基底

$$\hat{X}|+\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |+\rangle$$

$$\hat{X}|-\rangle = -|-\rangle$$

$\Rightarrow$ $|+\rangle$ は $\hat{X}$ の固有値 $+1$ の固有状態 ($\hat{X}$は100% $+1$)

$|-\rangle$ 〃 -1 〃 (〃 -1)

状態

$$|\psi\rangle = \psi_+|+\rangle + \psi_-|-\rangle \qquad \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$\langle \hat{X}\rangle_\psi = \langle\psi|\hat{X}|\psi\rangle = +1 \times |\psi_+|^2 + (-1)\times|\psi_-|^2$$

$\leftrightsquigarrow$

$\hat{X}$が$+1$である確率 $= |\psi_+|^2$, $\psi_+ = \langle +|\psi\rangle$ (確率振幅)

〃 -1 〃 $= |\psi_-|^2$, $\psi_- = \langle -|\psi\rangle$

一般の量子力学系 $\mathcal{H}$

定理

エルミート演算子 $\hat{A}$

$\Rightarrow$ $^{\exists}$正規直交基底 $|j\rangle,\ j=1,\cdots,N$ s.t. $|j\rangle$は$\hat{A}$の固有ベクトル

$\hat{A}|j\rangle = a_j|j\rangle$

$a_j \in \mathbb{R}$ 固有値

$$\hat{P}_a := \sum_{\substack{j \\ a_j=a}} |j\rangle\langle j|$$

（$\hat{A}$の値がa $\Rightarrow$ 1
それ以外 $\Rightarrow$ 0）

（$\hat{A}$の固有値aの固有空間への射影演算子）

例：$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

固有ベクトル	固有値
$\|1\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	1
$\|2\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	-1
$\|3\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	1

（演習問題：確かめよ）

$$\langle i|j\rangle=\delta_{ij} \quad , \quad i,j=1,2,3$$

$$\hat{A}=|1\rangle\langle 1|-|2\rangle\langle 2|+|3\rangle\langle 3|$$

射影

$$\hat{P}_1=|1\rangle\langle 1|+|3\rangle\langle 3|$$

$$\hat{P}_{-1}=|2\rangle\langle 2|$$

状態 $|\psi\rangle$, $\langle\psi|\psi\rangle=1$

$\hat{A}$ が a をとる確率 $=\langle\hat{P}_a\rangle_\psi=\langle\psi|\hat{P}_a|\psi\rangle$

$$=\sum_{\substack{j\\a_j=a}}\langle\psi|j\rangle\langle j|\psi\rangle=\sum_{\substack{j\\a_j=a}}|\langle j|\psi\rangle|^2$$

特に a_j がすべて異なる場合

$\hat{A}$ が a_j をとる確率 $=|\langle j|\psi\rangle|^2$

$\hat{A}$ の期待値

$$1 = \sum_{j=1}^{N} |j\rangle\langle j|$$

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \langle \psi | \underbrace{\hat{A} |j\rangle}_{a_j |j\rangle} \langle j | \psi \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_j \langle \psi | j \rangle \langle j | \psi \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_j \, |\langle j | \psi \rangle|^2$$

→ 確率論の意味での期待値

□ 観測

$|\psi\rangle$ という状態で $\hat{A}$ を観測し、a という値を得た

確率 $\langle \hat{P}_a \rangle_\psi$

直後にまた $\hat{A}$ を観測すると… 100%で a になるはず

$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{値 } a]{\hat{A} \text{ 観測}} \hat{P}_a |\psi\rangle$ になる

「波動関数の収縮」

※ $\hat{A} \hat{P}_a |\psi\rangle = a \hat{P}_a |\psi\rangle$ (固有ベクトル)

4. 量子力学の特色

☆ 不確定性関係

$\mathcal{H}$: ヒルベルト空間

$\hat{A}, \hat{B}$: エルミート演算子 (観測量)

$|\psi\rangle \in \mathcal{H}$: $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$\langle\hat{A}\rangle := \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ 期待値

分散

$$\Delta A^2 := \langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle$$

($\hat{A}$ の観測結果のばらつき.)

例: Qubit

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{Z}^2 = 1$$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{X}^2 = 1$$

$$\Delta Z^2 = \langle\hat{Z}^2\rangle - \langle\hat{Z}\rangle^2 = 1 - \langle\hat{Z}\rangle^2$$

$$\Delta X^2 = \langle\hat{X}^2\rangle - \langle\hat{X}\rangle^2 = 1 - \langle\hat{X}\rangle^2$$

$$|\psi\rangle = |0\rangle \Rightarrow \langle\hat{Z}\rangle = 1 \Rightarrow \Delta Z = 0$$

$$\Rightarrow \langle\hat{X}\rangle = 0 \Rightarrow \Delta X = 1$$

$\hat{Z}$の分散を小さくしようとする

$$\Delta Z = 0 \Rightarrow \langle \hat{Z} \rangle = \pm 1 \Rightarrow |\psi\rangle = |0\rangle \text{ or } |1\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta X = 1 \Leftarrow \langle \hat{X} \rangle = 0$$

$\hat{X}$の分散は最大！

> (どんな状態を選んでも) $\hat{Z}$と$\hat{X}$の分散を同時に0にすることはできない.

参考：Robertsonの不等式

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$ 「交換子」

$i[\hat{A}, \hat{B}]$ はエルミート

2年生で習う量子力学（ヒルベルト空間は無限次元）

$\hat{x}, \hat{p}$ ：エルミート演算子　$\hat{x}$：位置，$\hat{p}$：運動量

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$ $\langle \hbar \rangle = \hbar$

↑c数

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$$ 不確定性関係

□ 観測

量子力学では系に影響を全く与えずに観測することはできない.

例：Qubit

未知の状態 $|\psi\rangle$ ：観測で決定できる？

$\hat{z}$ を観測 $\Rightarrow$ $|0\rangle$ または $|1\rangle$ $\Rightarrow$ $|\psi\rangle$ の情報は消える！

$\hat{X}$ は 50% $+1$
50% -1

たとえ $|\psi\rangle = |+\rangle$ でも

関連する数学の定理

$\hat{A}, \hat{B}$ ：エルミート演算子，$[\hat{A}, \hat{B}] = 0$

$\Rightarrow$ $^{\exists}|j\rangle, j = 1, \cdots, N$ 正規直交基底

s.t. $\hat{A}|j\rangle = a_j|j\rangle$, $\hat{B}|j\rangle = b_j|j\rangle$

$a_j, b_j \in \mathbb{R}$ 「同時対角化可能」

言葉：$|j\rangle$ ：同時固有状態

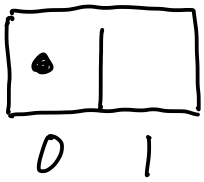
物理的な気持ち：$\hat{A}, \hat{B}$ は両方観測可能

- 順序によらないようにできる.
- 条件付き確率とか，そういう話ができる.

☆ 量子力学の「確率」とは？

普通の確率：情報の欠如

例：



ボールを入れてふたをして
ふる ⇝ 0にある or 1にある
決まっているがふたをあけるまで分からない

（自然界の）量子力学の確率は？

① 普通の確率と同じ（決まっているが知らないだけ）

② 観測するまで本当に決まっていない.

問題

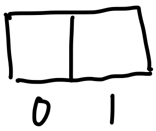
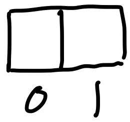
（ア） ① or ② ？（or それ以外？）

（イ） これは物理の問題なのか？
（実験で決着が（原理的に）つくのか？）

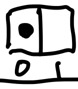
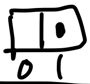
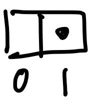
答え （イ） Yes，（ア） ②（or それ以外）

□ エンタングルメント（量子もつれ）

2つ Qubit　　A, B

A (Alice) 　　　B (Bob) 

独立な状態 $2\times 2 = 4$つ ⇒ ヒルベルト空間は4次元

B \ A		
	$\|00\rangle$	$\|10\rangle$
	$\|01\rangle$	$\|11\rangle$

$$|\psi\rangle = \psi_{00}|00\rangle + \psi_{01}|01\rangle + \psi_{10}|10\rangle + \psi_{11}|11\rangle$$

$$\psi_{00}, \psi_{01}, \psi_{10}, \psi_{11} \in \mathbb{C}$$

観測量

$$\underbrace{\hat{Z}_A, \hat{X}_A}_{\text{Aだけ見る}}, \underbrace{\hat{Z}_B, \hat{X}_B}_{\text{Bだけ見る}}$$

$q_B = 0, 1$

$$\hat{Z}_A|0\,q_B\rangle = +|0\,q_B\rangle, \quad \hat{X}_A|0\,q_B\rangle = |1\,q_B\rangle$$

$$\hat{Z}_A|1\,q_B\rangle = -|1\,q_B\rangle, \quad \hat{X}_A|1\,q_B\rangle = |0\,q_B\rangle$$

- ベル状態（EPR状態）

（アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼン）

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

（⇒ 確率 $\frac{1}{2}$ ずつで 00 又は 11，確率 0 で 01 又は 10）

この状態にしてAは地球に残り、Bは100万光年かなたに行く。

A 
地球

B 
100万光年先.

だいたい同時くらいに測定.

Bが $\hat{Z}_B$ を測定

Aが $\hat{Z}_A$ を測定 $\Rightarrow \begin{cases} 1 \to |00\rangle \to \text{100\%の確率で } 1 \\ -1 \to |11\rangle \to \text{100\%の確率で } -1 \end{cases}$

「量子もつれ」「エンタングルメント」

$\hat{Z}_B$ の値はいつ決まったのか？

- Aが測定したとき
  ↓
  光の速さを越えて「決まったこと」が伝わっている…
- Bが測定したとき
  ↓
  上を見るとAの測定の時点で決まっている気がする.
- 最初から
  ↓
  隠れた変数(?)
  量子力学の記述は不完全(?)

もっと変なこと.

A は $\hat{X}_A$ を測定　　　　　　　　　　B が $\hat{Z}_B$ を測定

$$\rightarrow \begin{cases} 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|+0\rangle + |+1\rangle) \longrightarrow \begin{cases} +1 & \text{確率 } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{〃} \end{cases} \\ -1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|-0\rangle - |-1\rangle) \longrightarrow \begin{cases} +1 & \text{〃} \\ -1 & \text{〃} \end{cases} \end{cases}$$

$g_B = 0, 1$

$$|+g_B\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\,g_B\rangle + |1\,g_B\rangle)$$

$$|-g_B\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\,g_B\rangle - |1\,g_B\rangle)$$

$\Downarrow$

$$\hat{X}_A|+g_B\rangle = +|+g_B\rangle$$

$$\hat{X}_A|-g_B\rangle = -|-g_B\rangle$$

A が $\hat{Z}_A$ を測定するか $\hat{X}_A$ を測定するかによって B の状態が異なる!!

※「何か」が超光速で伝っている気がする.

しかし. これを利用した超光速通信は不可能

A が $\hat{Z}_A$ を測定 $\longrightarrow$ B が $\hat{Z}_B$ を測定　古典的な確率 $\frac{1}{2}$ で ± 1

$\updownarrow$ 区別がつかない

〃 $\hat{X}_A$ 〃 $\longrightarrow$ 〃　量子論的な 〃

EPR 1935　量子力学は不完全

シュレーディンガー 1935　猫

最初から決まっているのでは？
（分からないだけ）

「隠れた変数理論」

巧妙に作れば量子力学の実験結果を
すべて再現できる気がする…

例：$\hat{z}_A, \hat{z}_B$ しか観測しないなら
できる。

ベルの不等式

ベル 1964

No!

以下の説明はベルの不等式の分かりやすいバージョン
（Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969）

- （局所的な）隠れた変数理論（スマホと思ってもらうといいかも）

A　⟷　B

通信．隠れた変数入　（確率的に決まる）
（スマホの状態）

⇓ 通信を切る
Aが何をしようと
Bに影響なし．　（局所性）

Aの観測量 A_1, A_2
B　〃　B_1, B_2
値はすべて ±1

1つのλ．次を考える

$$A_1(\lambda)B_1(\lambda)+A_1(\lambda)B_2(\lambda)+A_2(\lambda)B_1(\lambda)-A_2(\lambda)B_2(\lambda)$$

$$= A_1(\lambda)\underbrace{\left(B_1(\lambda)+B_2(\lambda)\right)}_{\substack{2\\-2\\0\\0}} + A_2(\lambda)\underbrace{\left(B_1(\lambda)-B_2(\lambda)\right)}_{\substack{0\\0\\2\\-2}}$$

のどれか

$$= \pm 2$$

λは確率的だった ⇒ 平均をとる

$$S := \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_2 B_2 \rangle$$

$$\boxed{-2 \leq S \leq 2}$$

ベルの不等式

CHSH不等式

量子力学

ベルの不等式を破ることができる.

状態 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$

$$\hat{A}_1 = \hat{Z}_A$$
$$\hat{A}_2 = \hat{X}_A$$
$$\hat{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Z}_B + \hat{X}_B\right)$$
$$\hat{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Z}_B - \hat{X}_B\right)$$

(固有値はすべて ±1)

$\Downarrow$

$$S := \langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle_\psi + \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle_\psi + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle_\psi - \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle_\psi$$

計算

$= 2\sqrt{2} \quad > 2 \quad \Rightarrow$ ベルの不等式を破る

> 量子力学の実験結果を隠れた変数理論で再現するのは不可能!

自然界はどっち? (量子力学 or 隠れた変数理論)

実験: ベルの不等式は破れているか?

↳ Yes!

2022年 ノーベル賞

計算

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

$$\hat{Z}_A|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |11\rangle\right) = \hat{Z}_B|\psi\rangle$$

$$\hat{X}_B|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right) = \hat{X}_A|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \hat{Z}_A \hat{Z}_B \rangle_\psi = \langle\psi|\hat{Z}_A\hat{Z}_B|\psi\rangle = 1$$

$$\langle \hat{Z}_A \hat{X}_B \rangle_\psi = \langle\psi|\hat{Z}_A\hat{X}_B|\psi\rangle = 0$$

$$\langle \hat{X}_A \hat{X}_B \rangle_\psi = \langle\psi|\hat{X}_A\hat{X}_B|\psi\rangle = 1$$

$$\langle \hat{X}_A \hat{Z}_B \rangle_\psi = 0$$

$$\hat{A}_1 = \hat{Z}_A \qquad \hat{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Z}_B + \hat{X}_B\right)$$

$$\hat{A}_2 = \hat{X}_A \qquad \hat{B}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Z}_B - \hat{X}_B\right)$$

$$\langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{\langle \hat{Z}_A \hat{Z}_B \rangle_\psi}_{=1} + \underbrace{\langle \hat{Z}_A \hat{X}_B \rangle_\psi}_{=0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle \hat{Z}_A \hat{Z}_B \rangle_\psi - \langle \hat{Z}_A \hat{X}_B \rangle_\psi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{\langle \hat{X}_A \hat{Z}_B \rangle_\psi}_{=0} + \underbrace{\langle \hat{X}_A \hat{X}_B \rangle_\psi}_{=1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle_\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle \hat{X}_A \hat{Z}_B \rangle_\psi - \langle \hat{X}_A \hat{X}_B \rangle\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = \langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle_\psi + \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle_\psi + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle_\psi - \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle_\psi = 2\sqrt{2}$$

5. 時間発展

☆ 定式化

時間 t ： c数（ふつうの数）
演算子ではない。

状態はどのように時間変化するか？
$|\psi(t)\rangle \in \mathcal{H}$　「シュレーディンガー描像」

（※ 別の定式化：観測量はどのように時間発展するか？ $\hat{A}(t)$ 「ハイゼンベルグ描像」）

次の方程式にしたがう

$$\boxed{i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle}$$

「シュレーディンガー方程式」

- $\hat{H}$ ： 「ハミルトニアン」
  エルミート演算子（観測量）
  「エネルギー」
  （※ なぜエネルギーか？ はすぐには説明できない。一旦認めて下さい）

- $\hbar := \frac{h}{2\pi}$ 「ディラック定数」 （エイチバー）

- h : 「プランク定数」

$$h := 6.62607015 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

定義値

今の立場での説明

エネルギーの単位 J と s^{-1} の変換に使う定数
（振動数）

（※ たとえ話
ニュートンの運動方程式で力の単位としてN
ではなく kgf を使ったとしたら…

$$m\ddot{x} = gF \quad , \quad g := 9.80665\ \mathrm{N/kgf}$$

）

まとめ

量子力学

- ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$
  エルミート内積付き複素ベクトル空間, …

- ハミルトニアン $\hat{H}$
  $\mathcal{H}$ 上のエルミート演算子, …
  （時間によっていてもよい）

〜〜→ 残る問題

- 考えたい物理系の $\mathcal{H}$ は何か？ $\hat{H}$ は何か？

- $\mathcal{H}$, $\hat{H}$ が与えられたとき、時間発展，観測量，…
  をどう計算するか？

□ 例：Qubit　$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，　$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$ の場合

$$|\psi(t)\rangle = \psi_0(t)|0\rangle + \psi_1(t)|1\rangle = \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{d}{dt}\psi_0(t) = E_0 \psi_0(t) & \cdots ① \\ i\hbar \dfrac{d}{dt}\psi_1(t) = E_1 \psi_1(t) \end{cases}$$

① $\Rightarrow$ $\dfrac{d}{dt}\psi_0(t) = -i\,\omega_0 \psi_0(t)$, $\omega_0 := \dfrac{E_0}{\hbar}$

$(\Rightarrow E_0 = \hbar\omega_0)$

$\Rightarrow$ $\psi_0(t) = e^{-i\omega_0 t}\psi_0(0)$

② (同様)

$\Rightarrow$ $\psi_1(t) = e^{-i\omega_1 t}\psi_1(0)$, $\omega_1 := \dfrac{E_1}{\hbar}$

解

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\omega_0 t}\psi_0(0) \\ e^{-i\omega_1 t}\psi_1(0) \end{pmatrix}$$

$$= e^{-i\omega_0 t}\psi_0(0)|0\rangle + e^{-i\omega_1 t}\psi_1(0)|1\rangle$$

$\Rightarrow$ $\hat{H}$が対角行列ならやさしい.

□ 例： Qubit

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon > 0)$$

⇓

$$i\hbar \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_0(t) \\ \psi_1(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\varepsilon\psi_1(t) \\ -\varepsilon\psi_0(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{d}{dt}\psi_0(t) = -\varepsilon\psi_1(t)$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\psi_1(t) = -\varepsilon\psi_0(t)$$

さっきより、ちょっと難しい。
対角じゃないから。

⇒ 対角化すればいい！
（前計算した結果を使う。 $\hat{H} = -\varepsilon\hat{X}$ ）

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$\hat{H}|+\rangle = E_+|+\rangle$$

$$\hat{H}|-\rangle = E_-|-\rangle$$

$$E_\pm = \mp\varepsilon$$

$$|\psi(t)\rangle = \psi_+(t)|+\rangle + \psi_-(t)|-\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \psi_+(t) = \langle + | \psi(t)\rangle, \quad \psi_-(t) = \langle - | \psi(t)\rangle$$

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

両辺 $\langle +|$ をかける

$$(\text{左辺}) = \langle +| i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = i\hbar \langle +| \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$$

$$= i\hbar \frac{d}{dt}\langle +|\psi(t)\rangle$$

$\langle +|$はtによらないことを使う。確かめよ

$$= i\hbar \frac{d}{dt}\psi_+(t)$$

$$(\text{右辺}) = \langle +|\hat{H}|\psi(t)\rangle = E_+\langle +|\psi(t)\rangle = E_+\psi_+(t)$$

こっちに当てる

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{d}{dt}\psi_+(t) = E_+\psi_+(t) \qquad (\text{前と同じ})$$

$$\psi_+(t) = e^{-i\omega_+ t}\psi_+(0) \qquad \omega_+ = \frac{E_+}{\hbar} = -\frac{\varepsilon}{\hbar}$$

同様に

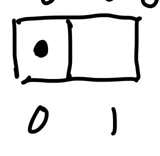
$$\psi_-(t) = e^{-i\omega_- t}\psi_-(0) \qquad \omega_- = \frac{E_-}{\hbar} = \frac{\varepsilon}{\hbar}$$

一般解

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_+ t}\psi_+(0)|+\rangle + e^{-i\omega_- t}\psi_-(0)|-\rangle$$

初期条件の例

t=0で



$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \Rightarrow \psi_+(0) = \psi_-(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega_+ t}\,|+\rangle + e^{-i\omega_- t}\,|-\rangle \right)$$

$$\left(|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \pm |1\rangle\right) \text{を代入} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega_+ t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) + e^{-i\omega_- t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega_+ t} + e^{-i\omega_- t}\right)|0\rangle + \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega_+ t} - e^{-i\omega_- t}\right)|0\rangle$$

$$\left(\begin{array}{l} \omega_\pm = \mp\frac{\varepsilon}{\hbar} \text{を代入} \\ \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos\theta \\ \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = i\sin\theta \end{array} \right)$$

$$= \cos\frac{\varepsilon}{\hbar}t\;|0\rangle + i\sin\frac{\varepsilon}{\hbar}t\;|1\rangle$$

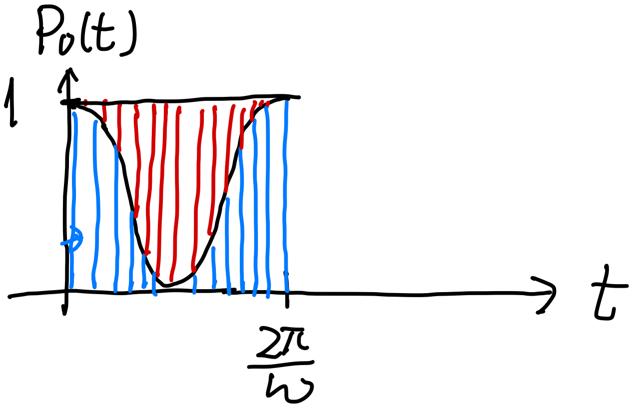
$$\left(\omega := \frac{E_- - E_+}{\hbar} = \frac{2\varepsilon}{\hbar} \right)$$

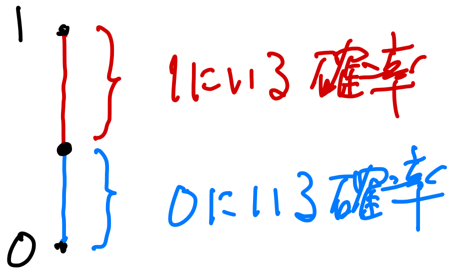
$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\omega t}{2}\;|0\rangle + i\sin\frac{\omega t}{2}\;|1\rangle$$

時刻 t で 0, 1 にいる確率

$$P_0(t) = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\omega t\right)$$

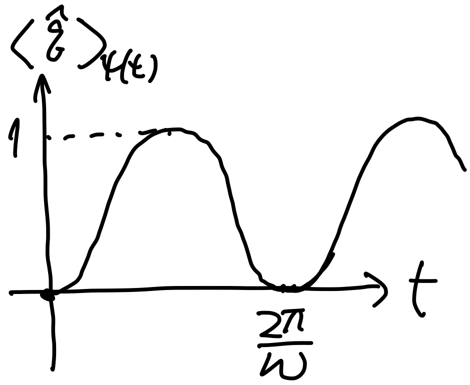
$$P_1(t) = |\langle 1|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\omega t\right)$$





$$\hat{g} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (粒子の位置)

の期待値



$$\langle \hat{g} \rangle_{\psi(t)} = \frac{1}{2}(1-\cos\omega t)$$

□ 時間依存する系

$\hat{H}$ は時間 t によっていてもよい

$\hat{H}(t)$ (時間による外力があるとき等)

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$$

厳密に解くのは一般には難しい.

以降この講義では $\hat{H}$ が t によらない場合のみ扱う

☆ エネルギー固有値、固有状態

一般のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$, ハミルトニアン $\hat{H}$
シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

どう解くか？

$\hat{H}$ が対角行列ならやさしい
（最初の例）

$\hat{H}$ が対角でないなら … 対角化すればよい。

$$\boxed{\hat{H}|\phi\rangle = E|\phi\rangle}$$

（時間によらない
シュレーディンガー方程式）

$\hat{H}$ が与えられている。　E, $|\phi\rangle$ が未知
（2、3年生でやる量子力学の主要な問題）

※
$|\phi\rangle$ が上の式を満たすなら
$c|\phi\rangle$ も同じ E で満たす　($^\forall c\in\mathbb{C}$, $c\neq 0$)
⇒ これを利用して $\langle\phi|\phi\rangle = 1$ とできる。

すべての解

$|n\rangle : n = 0, 1, \cdots, N-1$

$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad , \quad \langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'}$

言葉

- E_n :「エネルギー固有値」
- $|n\rangle$:「エネルギー固有状態」
- $n \neq n'$ だが $E_n = E_{n'}$ 「縮退」
- $E_n = E$ となる n の個数 (エネルギー E の状態の)「縮退度」
- E_n の集合とそれぞれの縮退度 「エネルギースペクトル」
- 最小の E_n に対応する状態 「基底状態」

  それ以外 「励起状態」

  2番目に小さい E_n に対応する状態 「第1励起状態」

  3 ⋮ ⋮ 2

  ⋮

□ E_n, $|n\rangle$, $n=0,1,\cdots,N-1$ が求まったとして

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \psi_n(t)|n\rangle \iff \psi_n(t) = \langle n|\psi(t)\rangle$$

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$\langle n|$ をかける

$$(\text{左辺}) = i\hbar\frac{d}{dt}\langle n|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{d}{dt}\psi_n(t)$$

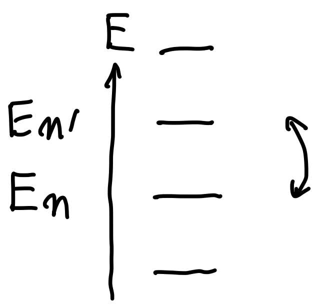
$$(\text{右辺}) = \langle n|\hat{H}|\psi(t)\rangle = E_n\langle n|\psi(t)\rangle = E_n\psi_n(t)$$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\frac{d}{dt}\psi_n(t) = E_n\psi_n(t)$$

$$\Rightarrow \quad \psi_n(t) = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\psi_n(0)$$

解けた!!

※ 高校のときに聞いたであろうお話



$E_{n'} > E_n$ として

$$|n'\rangle \longrightarrow |n\rangle$$

遷移 → 光 振動数 $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$

$E_{n'} - E_n = h\nu = \hbar\omega$

$$|n'\rangle \longleftarrow |n\rangle$$

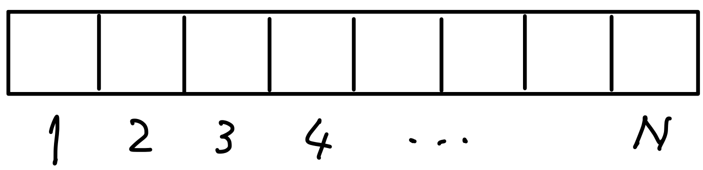
励起

□ 例 : Qubit

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad E_0 , E_1 \quad \text{エネルギー固有値}$$
$$|0\rangle , |1\rangle \quad \text{エネルギー固有状態}$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad -\varepsilon , +\varepsilon \quad \text{〃}$$
$$|+\rangle , |-\rangle \quad \text{〃}$$

□ 例 : N個ならんだ箱の中の粒子



粒子が箱 g にいる状態 $|g\rangle$, $g = 1, \cdots, N$

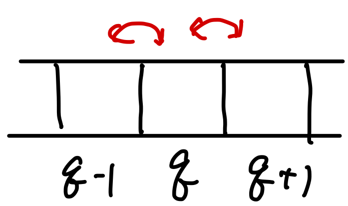
$$\langle g' | g \rangle = \delta_{g,g'}$$

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow g$$

次を考える $(\varepsilon > 0)$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & \\ -\varepsilon & 0 & -\varepsilon & 0 & \cdots \\ 0 & -\varepsilon & 0 & -\varepsilon & \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

時間たつととなりにとなりに行ける



$$\hat{H}|g\rangle = -\varepsilon|g-1\rangle - \varepsilon|g+1\rangle \ , \quad g \neq 1, N$$

$$\hat{H}|1\rangle = -\varepsilon|2\rangle \ , \quad \hat{H}|N\rangle = -\varepsilon|N-1\rangle$$

この系のエネルギー固有値，固有状態を求めてみる．

$$\hat{H}|\phi\rangle = E|\phi\rangle \ , \quad |\phi\rangle = \sum_{g=1}^{N}\phi_g|g\rangle$$

$\Rightarrow \phi_g = \langle g|\phi\rangle$

(ϕ_g, E が未知)

両辺 $\langle g|$ をかける

$$(\text{右辺}) = E\langle g|\phi\rangle = E\phi_g$$

$$(\text{左辺}) = \langle g|\hat{H}|\phi\rangle$$

($g \neq 1, N$ の場合)

$$= -\varepsilon\left(\langle g+1| + \langle g-1|\right)|\phi\rangle$$

$$= -\varepsilon\left(\phi_{g+1} + \phi_{g-1}\right)$$

($\phi_0 := 0$, $\phi_{N+1} := 0$ とすれば場合分けいらない)

$\Downarrow$

$$-\varepsilon\left(\phi_{g+1} + \phi_{g-1}\right) = E\phi_g \quad (g = 1, \cdots, N) \quad \cdots\cdots (*)$$

ただし $\phi_0 = \phi_{N+1} = 0$ $\cdots(\#)$

あとは (*), (#) を解けばよい.

(*) は 定数係数の2階の線形差分方程式 (漸化式)

係数が g によっていない　　解全体がベクトル空間

→ 1次独立な解を次元分
見つければよい.　(今は2つ)

$$\phi_g := e^{ipg}$$ (p は定数) みたいな形

(*) に代入 ⇒ P と E の関係
計算は後まわし

E 固定. (*) は $g \to -g$ で不変

⇒ e^{ipg} が解なら e^{-ipg} も解
$p \neq 0$ なら独立な2つの解

⇒ $\cos pg$, $\sin pg$ も解

境界条件 (#) を考える

$$\phi_0 = \phi_{N+1} = 0$$

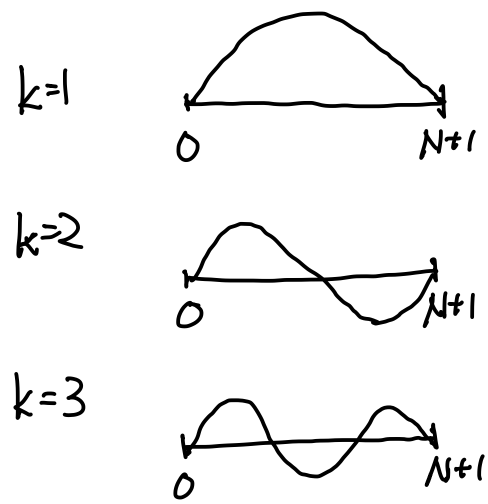
$\phi_0 = 0 \Rightarrow \cos pq$ はだめ. $\sin pq$

$$\phi_{N+1} = 0 \Rightarrow \sin p(N+1) = 0$$

$$p(N+1) = \pi k \quad , \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

$$p = \frac{\pi k}{N+1}$$

$$\phi_q = \sin \frac{\pi k q}{N+1}$$



(cf. 固定端条件の定在波の問題)

(*) に代入

$$\sin p(q+1) + \sin p(q-1) = 2 \sin\left[\frac{1}{2}\left(p(q+1) + p(q-1)\right)\right]$$
$$\times \cos\left[\frac{1}{2}\left(p(q+1) - p(q-1)\right)\right]$$

$$= 2 \sin pq \cos p$$

(*) の

(左辺) $= -2\varepsilon \cos p \sin pq$

(右辺) $= E \sin pq$

$$\Rightarrow E = -2\varepsilon \cos p$$
$$= -2\varepsilon \cos \frac{\pi k}{N+1}$$

$k = 1, 2, \cdots$

↑どこまで！？

答え

$k = 1, 2, \cdots, N$

理由

$k = N+1$ のとき

$$\phi_g = \sin\frac{\pi(N+1)g}{N+1} = \sin\pi g = 0$$

$(\because g \in \mathbb{Z})$

$k = N+2$ のとき

$$\phi_g = \sin\frac{\pi((N+1)+1)g}{N+1} = \sin\left(\frac{\pi g}{N+1} + \pi g\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi g}{N+1} - \pi g\right)$$

$$= -\sin\left(\pi g - \frac{\pi g}{N+1}\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi N g}{N+1}\right) \propto (k=N \text{ の場合})$$

$\vdots$

$k > N$ は $k = 1, \cdots, N$ のどれかに比例

or 0

固有ベクトル

$$|\phi_k\rangle = \sum_{\ell=1}^{N} \sin\frac{\pi k \ell}{N+1}\, |\ell\rangle$$

(規格化されていない)

固有値

$$E_k = -2\varepsilon \cos\frac{\pi k}{N+1}$$

☆ 行列の指数関数

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi_n(t) = E_n \psi_n(t) \Rightarrow \psi_n(t) = e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\psi_n(0)$$

なら

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}|\psi(0)\rangle$$

では?

Yes! ただ $e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$ を定義する必要がある.

ふつうの指数関数　$x \in \mathbb{C} \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

$$\rightsquigarrow \boxed{\hat{A}: \text{行列} \qquad e^{\hat{A}} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n}$$

t: 実数の変数.　$\hat{A}$: tによらない行列

$$e^{t\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t\hat{A})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{A}^n$$

$$\frac{d}{dt} e^{t\hat{A}} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{A}^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^n}{n!} \hat{A}^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n t^{n-1}}{n!} \hat{A}^n$$

無限和なので
"当たりまえ" ではない.
今の場合正しいことが知られている.

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \hat{A}^n = \hat{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \hat{A}^k = \hat{A} e^{t\hat{A}}$$

注意　　$k := n-1$

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{t\hat{A}} = \hat{A} e^{t\hat{A}}}$$

(※ $\hat{A}$がtによる場合 $\frac{d}{dt} e^{\hat{A}(t)}$は難しい

一般に $\left(\frac{d}{dt}\hat{A}(t)\right)$と$\hat{A}(t)$は交換しない

$$\frac{d}{dt}\left(\hat{A}(t)^2\right) = \left(\frac{d}{dt}\hat{A}(t)\right)\hat{A}(t) + \hat{A}\left(\frac{d}{dt}\hat{A}(t)\right)$$
)

※ $\hat{A}$が与えられたとして、$e^{t\hat{A}}$の行列成分を求めるのは、一般に非自明。

例えば、対角化することで求められる。

□ 公式

- $e^{t\hat{A}} e^{s\hat{A}} = e^{(t+s)\hat{A}}$
- $(e^{\hat{A}})^{-1} = e^{-\hat{A}}$
- $(e^{\hat{A}})^{\dagger} = e^{\hat{A}^{\dagger}}$

※ $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}$は$[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$なら$e^{\hat{A}+\hat{B}}$と異なる

☆ 全確率の保存

全確率 $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ とした

問題： 時刻 0 で $\langle \psi(0) | \psi(0) \rangle = 1$
とすると $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 1$ となるか？

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad \cdots ①$$

ブラにする

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi(t)| = \langle \psi(t)| \hat{H} \quad \cdots ② \quad (\hat{H}^\dagger = \hat{H} \text{ を用いた})$$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \left(\frac{d}{dt} \langle \psi(t)| \right) |\psi(t)\rangle + \langle \psi(t)| \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$$

①,②

$$= -\frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t)| \hat{H} |\psi(t)\rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \psi(t)| \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

$$= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \psi(0) | \psi(0) \rangle$$

別の説明

①を形式的に解く

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t,0)|\psi(0)\rangle \ , \quad \hat{U}(t,0) := e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t}$$

「時間発展の演算子」

$$\hat{U}(t,0)^{\dagger} = e^{i\frac{\hat{H}}{\hbar}t} = \hat{U}(t,0)^{-1}$$

$\hat{H}^{\dagger} = \hat{H}$ を用いた

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{U}(t,0) \text{ は ユニタリー}}$

$\Rightarrow$ $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle$

全確率の保存

$\Uparrow$

時間発展の演算子はユニタリー

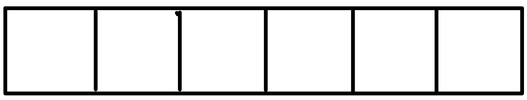
「ユニタリー性」

6. 連続系

直線上を動く粒子のような系の取りあつかいに向けて

☆ シュレーディンガー方程式

Nコならんだ箱



1　2　・・・　N

$|q\rangle \ : \ q = 1, \cdots, N$　　状態 $|\psi\rangle = \sum_{q=1}^{N} \psi_q |q\rangle$

ハミルトニアン $\hat{H}$. 次のものを考える

$$\hat{H}|q\rangle = \underbrace{-\varepsilon\left(|q+1\rangle + |q-1\rangle\right)}_{\text{前に考えたもの}} + \underbrace{v_q |q\rangle}_{\text{ついでに}}$$

$(v_q \in \mathbb{R})$

($q=1, N$ のときは場合分け必要)

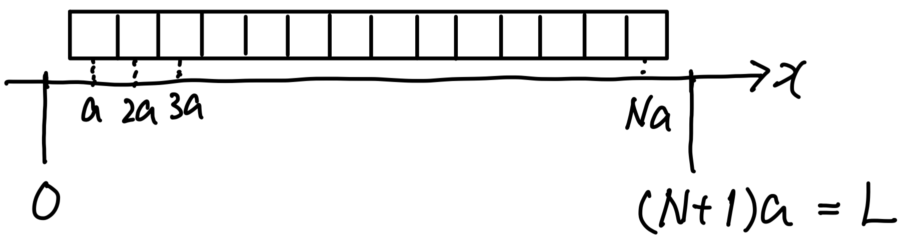
$\Downarrow$

$$\hat{H}|\psi\rangle = \sum_{q=1}^{N} \underbrace{\left[-\varepsilon\left(\psi_{q+1} + \psi_{q-1}\right) + v_q \psi_q\right]}_{=: (\hat{H}\psi)_q} |q\rangle$$

$(\psi_0 = \psi_{N+1} = 0)$

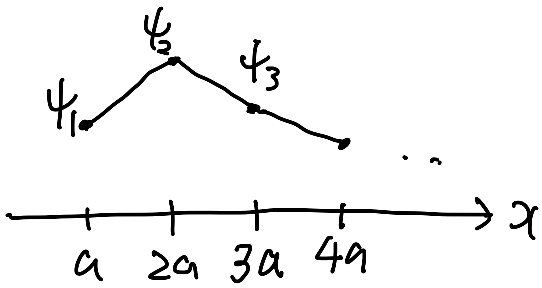
やりたいこと

a : 箱の長さ ⇒ x 軸を考える



L は固定. a は非常に小さい , N が非常に大きい

⟶ 粒子の位置の x 座標は近似的に連続と思える.



記号 $\psi(x)$

$$\psi(x=aq) = \psi_q = \langle q|\psi\rangle$$

$$\langle q=\tfrac{x}{a}|\hat{H}|\psi\rangle = -\varepsilon(\psi_{q+1}+\psi_{q-1}) + v_q\psi_q$$

$$= -\varepsilon\underbrace{(\psi_{q+1}+\psi_{q-1}-2\psi_q)} + (v_q - 2\varepsilon)\psi_q$$

$$= (\psi_{q+1}-\psi_q) - (\psi_q - \psi_{q-1})$$

$$= a^2\frac{1}{a}\left(\underbrace{\frac{\psi(x+a)-\psi(x)}{a}}_{\simeq\psi'(x)} - \underbrace{\frac{\psi(x)-\psi(x-a)}{a}}_{\simeq\psi'(x-a)}\right)$$

$$= a^2\psi''(x)$$

$$\langle q=\tfrac{x}{a}|\hat{H}|\psi\rangle = -\varepsilon a^2\psi''(x) + V(x)\psi(x)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{定義}\quad V(x):\\ \qquad V(x=aq) = v_q - 2\varepsilon\end{array}\right)$$

$m>0$ を $\dfrac{\hbar^2}{2m} = \varepsilon a^2$ で定義

$$|\psi\rangle = \sum_{q=1}^{N} \psi(x=aq)\,|q\rangle$$

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = \sum_{q=1}^{N} (\hat{H}\psi)(x)\,|q\rangle$$

ただし $(\hat{H}\psi)(x) = \left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x)$

時刻 t での状態

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{q=1}^{N} \psi(t, x=aq)\,|q\rangle$$

$\longrightarrow \psi(t,x)$ （2変数関数）

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\psi(t)\rangle$$

$$(\text{左辺}) = \sum_{q=1}^{N} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x)\,|q\rangle \qquad (x=aq)$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{q=1}^{N}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(t,x)\,|q\rangle$$

$\Downarrow$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(t,x)}$$

⇝ 2年生後期でやる量子力学へ

☆ 運動方程式

□ 位置の演算子 $\hat{x}$: $\hat{x}|g\rangle = ag|g\rangle$

$$\hat{x}|\psi\rangle = \sum_g \hat{x}\psi(x)|g\rangle \qquad (x = ag)$$

$$= \sum_g (\hat{x}\psi)(x)|g\rangle, \qquad (\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x)$$

$$\bar{x}(t) := \langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle,$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\bar{x}}(t) = \left(\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|\right)\hat{x}|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\hat{x}\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle$$

シュレーディンガー方程式

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)| = \frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|\hat{H}$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|\underbrace{\left(\hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H}\right)}_{[\hat{H},\hat{x}]}|\psi(t)\rangle$$

$\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{x}]$ について

$$\left(\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{x}]\psi\right)(x) = \frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), x\right]\psi(x)$$

$$= -i\hbar\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, x\right]\psi(x)$$

$$= -i\hbar\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$$

$$\left(公式 \quad [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \right)$$

$$\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right]\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x}(x\psi(x)) - x\psi'(x) = \psi(x) \right)$$

演算子 $\hat{p}$: $\quad \hat{p}|\psi\rangle = \sum_{q}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right)|q\rangle$

「運動量」 $\quad \left(|\psi\rangle = \sum_{q}\psi(x)|q\rangle \text{ のとき} \right)$

$$\bar{p}(t) := \langle\psi(t)|\hat{p}|\psi(t)\rangle$$

得られた式

$$\dot{\bar{x}}(t) = \frac{1}{m}\bar{p}(t) \quad \Rightarrow \quad \bar{p}(t) = m\dot{\bar{x}}(t)$$

□ $\bar{p}(t)$ の時間変化

$$\dot{\bar{p}}(t) = \cdots = \frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|[\hat{H}, \hat{p}]|\psi(x)\rangle$$

$$\left(\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{p}]\psi\right)(x) = \frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi(x)$$

$$= \left[V(x), \frac{\partial}{\partial x}\right]\psi(x)$$

$$= -V'(x)\psi(x)$$

$$\left[V(x), \frac{\partial}{\partial x}\right]\psi(x) = V(x)\psi'(x) - \frac{\partial}{\partial x}(V(x)\psi(x))$$

$$= V(x)\psi'(x) - V'(x)\psi(x) - V(x)\psi'(x)$$

$$= -V'(x)\psi(x)$$

簡単のため、$V(x)$が多項式の場合
得られた式

$$\dot{p}(t) = \langle \psi(t) | (-V'(\hat{x})) | \psi(t) \rangle =: -\overline{V'(x)}$$

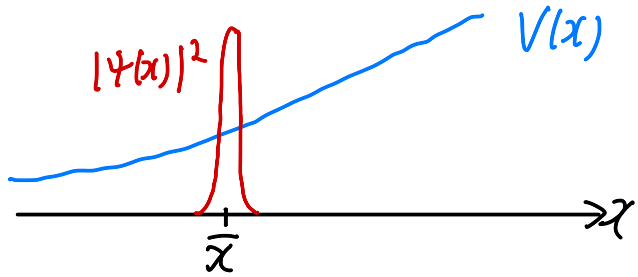
$$\left.\begin{aligned} m\dot{\bar{x}} &= \bar{p} \\ \dot{\bar{p}} &= -\overline{V'(x)} \end{aligned}\right) \Rightarrow \boxed{m\ddot{\bar{x}} = -\overline{V'(x)}}$$

◎ $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$ と書ける。
「エネルギー」

◎ $\overline{V'(x)}$ と $V'(\bar{x})$ は一般に異なる

しかし
$\Delta x := \sqrt{\langle(\hat{x}-\bar{x})^2\rangle}$ が小さい場合

s.t ① $|x-\bar{x}| \leq \Delta x$ で
$V'(x)$ は定数とみなせる



② 実験の精度より小さい。⇒ 期待値以外観測できない

$$\overline{V'(x)} \simeq V'(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{\bar{x}} = -V'(\bar{x})}$$

ニュートンの運動方程式

⇒ ニュートン力学

7. 数学の準備 その2

☆ 2変数関数の微分

$f(x,y)$　　x, y の関数

偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(f(x+\varepsilon, y) - f(x,y) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(f(x, y+\varepsilon) - f(x,y) \right)$$

気持ち　$\Delta x, \Delta y$ が小さい

$$\Delta f := f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x} \Delta x$$

$$+ \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \Delta y$$

$$\approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

$\Delta x, \Delta y$ を小さくすれば
好きなだけ精度がよくなる。

(≈を書きたくない)

$\Updownarrow$

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

全微分

□ 変数変換

$f(x, y)$: x, y の関数

x', y' の関数

$$(x, y) \longrightarrow (x', y')$$

$$x = x(x', y')$$
$$y = y(x', y')$$

$f(x(x', y'), y(x', y'))$: x', y' の関数

$\Downarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = ? \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = ?$$

全微分を考えると分かりやすい.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial f}{\partial x'} dx' + \frac{\partial f}{\partial x'} dy'$$

代入

比較

$$\begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial x'} dx' + \dfrac{\partial x}{\partial y'} dy' \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial x'} dx' + \dfrac{\partial y}{\partial y'} dy' \end{cases}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy'\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy'\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}\right) dx' + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}\right) dy'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}$$

fはなんでもよかった

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial x}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y}\end{aligned}}$$

と書く.

□ 注意

- 3変数 以上の関数 も同様.

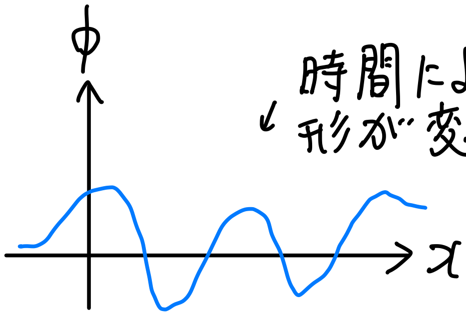
- 電磁気で出てきたベクトル解析の記号を使うと見通しがよくなる場合が多い.

- 積分も大事:

  定義(気持ち), 変数変換(ヤコビアン)

  グリーンの定理, ガウスの定理, ストークスの定理

☆ 波動方程式
(くわしくは力学2の授業で)



1次元

「変位」 $\phi(t,x)$

時間変化を記述する方程式

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = 0 \qquad \text{「波動方程式」}}$$

$c>0$ 速さの次元を持つ定数

「速さ」

解いてみる.

変数変換 $(t,x)\to(u,v)$

$$u = ct - x$$

$$v = ct + x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v} = c\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2 - \left(-\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)^2$$

※ 微分どうしは交換する

$$= \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

$$= 4\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}$$

波動方程式

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\phi = 0$$

∘ $\phi = f(u)$ （v によらない 任意 u だけの関数）

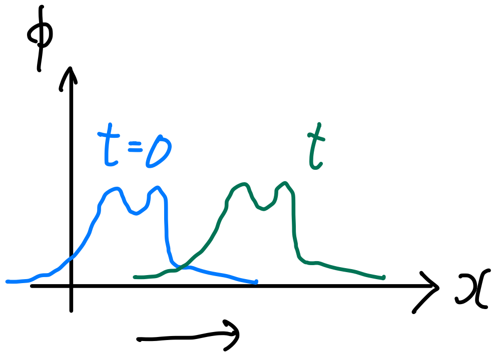
は解 （$\because \frac{\partial}{\partial v}\phi = 0$ ）

もどす

$\phi(t, x) = f(ct - x)$

$t = 0$ で $\phi(0, x) = f(-x)$

時刻 t で $\phi(t, x) = f(ct - x)$



ct だけ平行移動

形を保ったまま x 軸正の方向に速さ c で進む波

◦ $\phi = g(v)$ （vだけの関数）も解

$\phi(t,x) = g(ct+x)$: x軸負の方向に速さcで進む波

◦ 一般解：これらの重ね合わせ

$$\phi(t,x) = f(ct-x) + g(ct+x)$$

⇒ 高校で習った波動を記述している。

※ 3次元の場合 $\phi(t,x,y,z)$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi = 0$$

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{（ラプラシアン）}$$

※ 真空中（$\rho=0$, $j=0$）のマックスウェル方程式

⇒ 波動方程式（横波）「電磁波」

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad \text{（光速）}$$

ガリレイ変換

ニュートン力学：慣性系の座標 t, x

一定の速度 v で走る観測者から見た座標

$$t' = t \quad , \quad x' = x - vt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow$$

運動方程式 $m\frac{d^2x}{dt^2} = F$ は不変

ガリレイの相対性原理

波動方程式？

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = 0$$

代入

$$\Downarrow$$

$$\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'} - \frac{v}{c}\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial x'^2}\right]\phi = 0$$

形が変わる！

8. 特殊相対性理論の導入

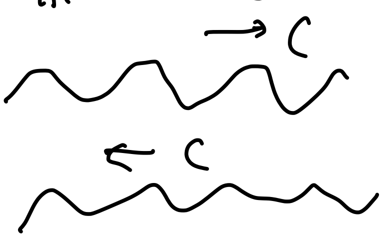
☆ 光速

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=299792458\ \mathrm{m/s}$$

(今は定義値)

マックスウェル方程式の中では定数

どの系から見た速さか？



"静止"している人

なら

$\overleftarrow{v}$ 速度vで動く人

$c\pm v$になるような気がしないですか？

式で

マックスウェル方程 ⟶ 波動方程式

ガリレイ変換で形が変わってしまう。

仮定：マックスウェル方程式が厳密に成り立つ系(絶対系)
がある．絶対系に対して動いている系では，
マックスウェル方程式が変形する．

疑問：地球の絶対系に対する速さはいくらか？
(少くとも公転速度 $\sim \frac{c}{10000}$ くらいでは動いているはず)

マイケルソン－モーリーの実験

⇒ 地球の絶対系に対する速さは
公転速度よりずっと小さい．

MM実験含め、光に関するそれまでのすべての実験を
説明する理論？

- …
  …

- 特殊相対性理論
  光速は一定．時間，空間の概念を変える．

☆ 波動方程式を不変にする変換

$\Rightarrow$ ローレンツ変換

波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi=0$$

線形変換 $(t,x)\to(t',x')$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

であって

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)\phi=\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi$$

となるものをさがす

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$=A\frac{\partial}{\partial t'}+Dc\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}=A\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+D\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'}+\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'}$$

$$=B\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}+E\frac{\partial}{\partial x'}$$

書く量をへらすため
$$\partial_0 := \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$
$$\partial_1 := \frac{\partial}{\partial x}$$
$$\partial_0' := \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t'}$$
$$\partial_1' := \frac{\partial}{\partial x'}$$

$$\partial_0 = A\partial_0' + D\partial_1'$$
$$\partial_1 = B\partial_0' + E\partial_1'$$

$$(\partial_0^2 - \partial_1^2)\phi = \left[(A\partial_0' + D\partial_1')^2 - (B\partial_0' + E\partial_1')^2\right]\phi$$
$$= \left[(A^2 - B^2)\partial_0'^2 - (-D^2 + E^2)\partial_1'^2 + (2AD - 2BE)\partial_0'\partial_1'\right]\phi$$

これが $= (\partial_0'^2 - \partial_1'^2)\phi$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A^2 - B^2 = 1 & \cdots ① \\ -D^2 + E^2 = 1 & \cdots ② \\ AD - BE = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$
← これを満たす変換「ローレンツ変換」

$A > 0$, $E > 0$ の場合 ……

③ $\Rightarrow$ $\dfrac{D}{E} = \dfrac{B}{A} =: -\beta$

$\Rightarrow B = -\beta A$, $D = -\beta E$

①, ② に代入

$$A^2 - \beta^2 A^2 = 1 \Rightarrow A^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} =: \gamma \quad (A>0)$$

$$-\beta^2 E^2 + E^2 = 1 \Rightarrow E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} =: \gamma$$

$$A = E = \gamma, \quad B = D = -\beta\gamma$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}}, \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

x' 系の原点 ($x'=0$) を (t, x) 座標で観測する.

$$0 = -\beta\gamma ct + \gamma x \Rightarrow x = \beta ct$$

速度 $v = \beta c$ で動いている

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{v}{c}}$$

☆ ローレンツ変換の導出

□ 原理

- 特殊相対性原理：
  すべての慣性系で物理法則は同じ形に書ける
- 光速不変：
  すべての慣性系で光速は光源の運動状態によらず一定の値 c

⇓

特殊相対性理論の構築

※ 無意識に仮定していることもある

□ 空間

仮定：静止しているものに関して、ユークリッド幾何が成り立つ

直交座標、距離、…

(x, y, z)

□ 時間 (重要)

絶対時間は仮定しない

• 正しい時間間隔を測れる時計が存在する.

静止した時計はその時計が置かれた点で起こったことの時間間隔を正しく測れる

離れた点は測れない

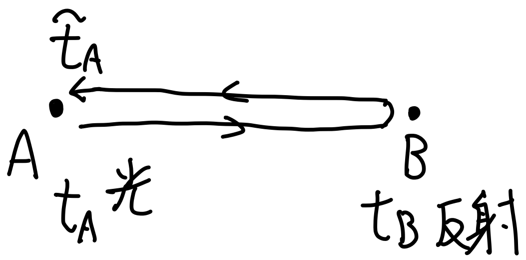
⇓

空間の各点に時計

$\boxed{\text{時刻を合わせる}}$

⇒ この慣性系の時刻 t

• 時刻の合わせ方



AとBの時計が合っている $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $t_B = \dfrac{\tilde{t}_A + t_A}{2}$

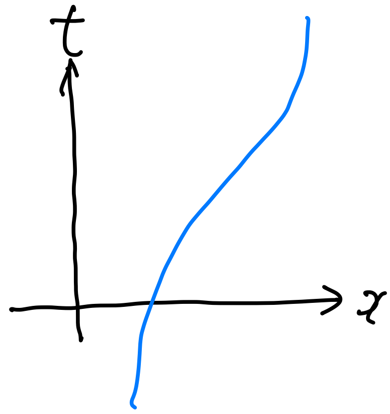
時計を持った観測者を空間の各点に配置, 全員の時計を合わせる.

⇒ 座標系 (t, x, y, z) (以後空間座標は x のみ 簡単のため)

□ 速度

運動する粒子

時刻 t の位置 $x(t)$



速度 $v(t) := \dfrac{dx(t)}{dt} =: \dot{x}(t)$

$v(t)$ が一定（t によらない）運動 ＝「等速直線運動」

「『力を受けない』粒子は等速直線運動する」
ような座標系
＝
「慣性系」

仮定： 慣性系は存在する.

仮定： ある慣性系から見て一定の速度 v ($|v| < c$)
で等速直線運動する粒子があったとき.
その粒子が静止して見える慣性系が存在する

※ 粒子と座標系を混同しないこと

ローレンツ変換

2つの慣性系

S系 (t, x), S'系 (t', x') の間の変換を求める。

1 S, S' は両方慣性系

S系で等速直線運動

⇕

S'系で等速直線運動

⇔ 力を受けない粒子

⇓

(t, x) と (t', x') の関係は1次式

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ F & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E \\ G \end{pmatrix}$$

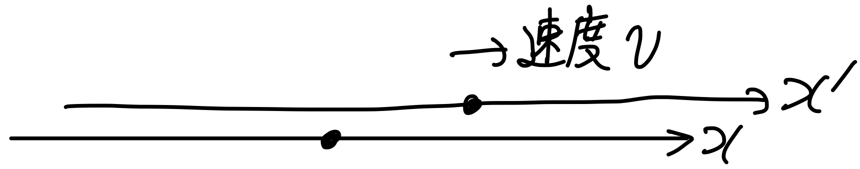
(A, B, E, F, D, G : 定数 (x, t によらない))

$t'-E$, $x'-G$ をあらためて t', x' とおく。

$(t=0, x=0)$ と $(t'=0, x'=0)$ が同じ時空点

$$\boxed{\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ F & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}}$$

② S'系の空間の原点はS系から見て等速直線運動



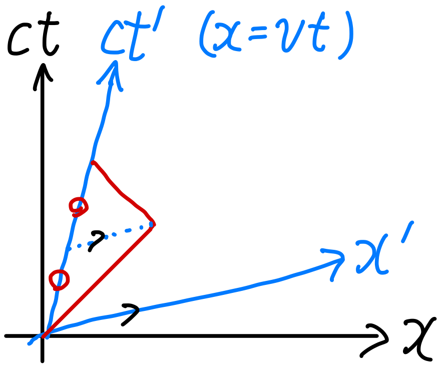
$x'=0$

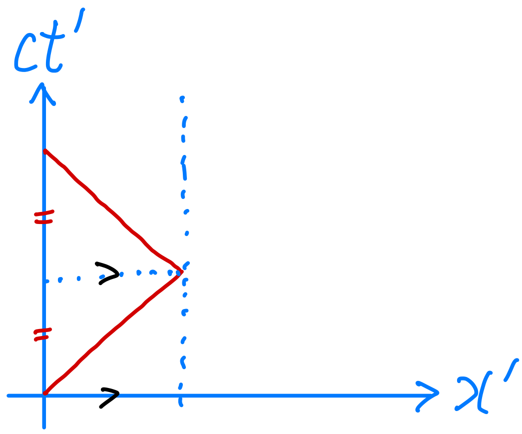
$=Ft+Dx \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{F}{D}t$

$\Rightarrow \quad v=-\frac{F}{D} \quad \Rightarrow \quad F=-Dv$

$$\boxed{\begin{aligned} t' &= At+Bx \\ x' &= D(-vt+x) \end{aligned}}$$

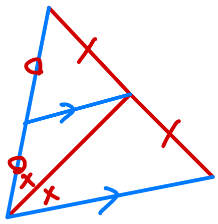
③ $t'=$一定の線（時計合わせ）





- 光は45°の線（光速はc）
- 変わらないもの：直線の平行
  平行な線分の長さの比
- 変わるもの　：

$x = \beta ct \qquad \beta := \frac{v}{c}$

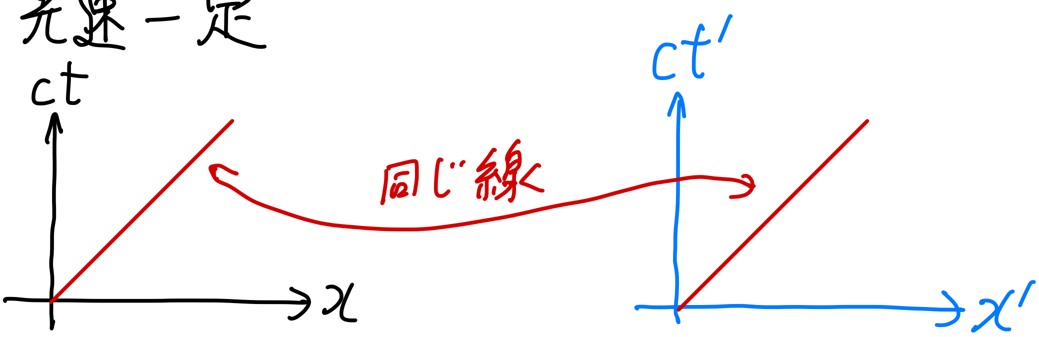


x' 軸は ct' 軸を45°の線に関して鏡像をとったもの

$\Rightarrow$ x'軸 $(t'=0)$ $\quad ct = \beta x$

$$\boxed{\begin{aligned} ct' &= A(ct - \beta x) \\ x' &= D(-\beta ct + x) \end{aligned}}$$

④ 光速一定



$$ct' - x' = (A + \beta D)ct - (A\beta + D)x$$

$$ct - x = 0 \Leftrightarrow ct' - x' = 0$$

$$= (A + \beta D)ct - (A\beta + D)ct$$

$$= ct(A - D)(1 - \beta)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A = D}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}} \quad \cdots (*)$$

$D = D(v)$ (vによって決まる)を求めるだけ

⑤ 逆に解く.

(*) ⇒ $$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{D(v)} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{D(v)(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \cdots (\mathrm{i})$$

S′系から見るとS系は$(-v)$で動く

(*)を適用

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = D(-v) \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad \cdots (\mathrm{ii})$$

(i), (ii)を比較

$$\boxed{D(-v)\,D(v) = \frac{1}{1-\beta^2}} \quad \cdots (\mathrm{iii})$$

⑥ $D(-v) = D(v)$ を示す.

(S″系) $x'' = -x$, $t'' = t$ ← x軸の向きを変える

ユークリッド幾何の座標変換

(S‴系) $x''' = -x'$, $t''' = t'$ ←

(ア) (*)に代入

$$\begin{pmatrix} ct''' \\ -x''' \end{pmatrix} = D(v) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ -x'' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ct''' \\ x''' \end{pmatrix} = D(v) \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

(イ)　S'''系はS''系から見て速度 $-v$ で動いている

$$\begin{pmatrix} ct''' \\ x''' \end{pmatrix} = D(-v) \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

(ア)(イ)　$\Rightarrow$　$D(v) = D(-v)$

(#)　$\Rightarrow$　$D(v) = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$v=0$ のとき、$t'=t$, $x'=x$ になる方

$$D(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} =: \gamma$$

ローレンツ変換

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}}$$

☆ ミンコフスキー空間

ローレンツ変換

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \end{cases}$$

代入して計算

$$-(ct')^2 + x'^2 = -(ct)^2 + x^2$$

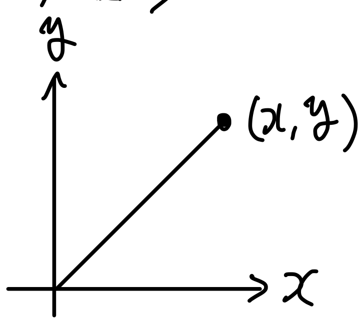
⇒ $s^2 := -(ct)^2 + x^2$ はローレンツ変換で不変

↑ ※正とは限らない

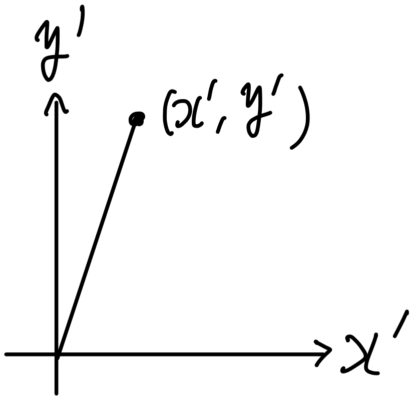
こういう構造がある4次元空間

「ミンコフスキー空間」

アナロジー

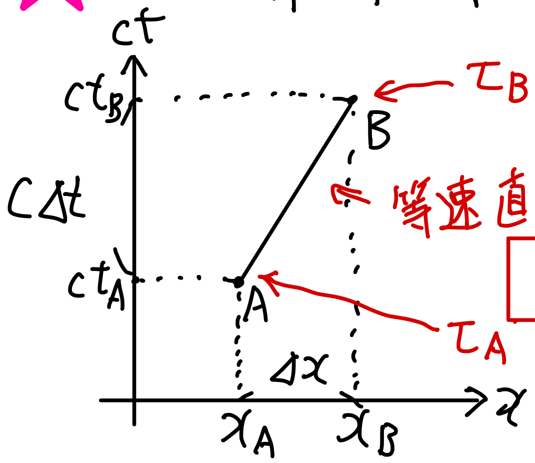


回転 ⇒



$s^2 = x^2 + y^2$ ((長さ)^2) が不変　「ユークリッド空間」

☆ 固有時間



← 等速直線運動する粒子の世界線の一部

時計をのせておく。

τ : 「固有時間」

$\Delta\tau := \tau_B - \tau_A$

ローレンツ変換

⇓ （演習：導出せよ）

$$\begin{cases} c\Delta t' = \gamma c\Delta t - \gamma\beta\Delta x \\ \Delta x' = -\gamma\beta c\Delta t + \gamma\Delta x \end{cases}$$

⇓ さっきと同じ計算

$\Delta s^2 := -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$ はローレンツ不変

—

S′系を粒子が静止して見える慣性系

$$\begin{cases} \Delta t' = \Delta\tau \\ \Delta x' = 0 \end{cases}$$

（S′系の観測者で粒子と同じ位置にいる人の時計と同じ進み方）

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2 \Rightarrow -(c\Delta\tau)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{1}{c^2}\Delta x^2}}$$

□ 走っている時計のおくれ

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{1}{c^2}\Delta x^2}$$

$$= \Delta t\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2}$$

$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$
粒子の速度

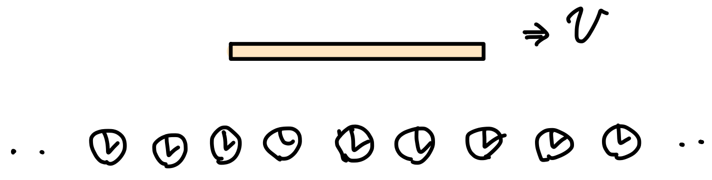
$$\boxed{\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\beta := \frac{v}{c}\right)$$

$v \neq 0$ なら
$\Delta\tau < \Delta t$

☆ ローレンツ収縮

"走っている棒は縮む"

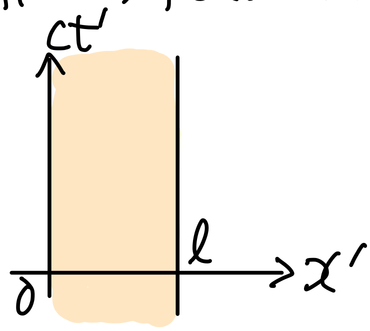
どうやって測るか？



"時刻0に自分の目の前に棒の端がある人は手を挙げて下さい"

⇒ その2人のx座標の差 = 長さ

S′系に対して止まっている長さlの棒



ローレンツ変換の式の1つ

$$x' = -\gamma\beta ct + \gamma x$$

$$t=0,\ x'=0 \Rightarrow x=0$$

$$t=0,\ x'=l \Rightarrow x=\frac{1}{\gamma}l = l\sqrt{1-\beta^2}$$

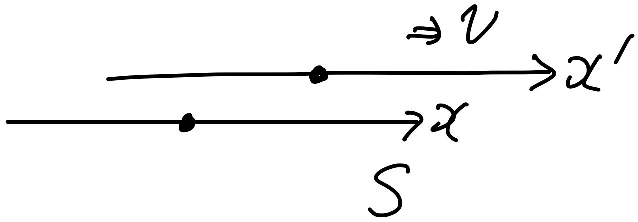
$\Rightarrow$ S系から見た長さ $= l\sqrt{1-\beta^2} < l$

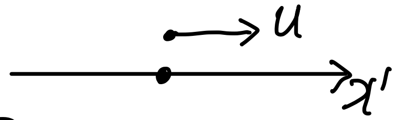
($v \neq 0$ のとき)

考えてみて下さい。

同じ長さの走っている棒と止まっている棒を比べたらどうなる？

☆ 速度の合成

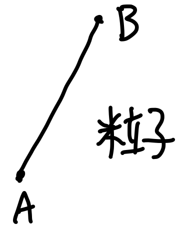




S′系から見て速度uで動いている粒子

S系から見たら？

ローレンツ変換



$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ 逆に解く

$$\begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$\frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{\gamma\beta c\Delta t' + \gamma\Delta x'}{\gamma c\Delta t' + \gamma\beta\Delta x'}$$

$$= \frac{\beta c + u}{c + \beta u} \qquad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

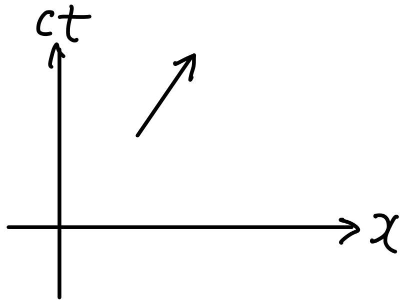
$$\boxed{V := \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{v + u}{1 + \frac{vu}{c^2}}}$$

※
- $v, u \ll c \Rightarrow V \approx v + u$ （ニュートン力学の速度の合成）
- $u = c \Rightarrow V = c$ （光速不変）
- $0 < u, v < c \Rightarrow V < c$
  （証明せよ）

速度を合成することで光速を越えることはない

☆ ここから先の話

- 定式化 : 4元ベクトル, テンソル



- 力学 : 修正される

  運動方程式

  すべての慣性系で同じ形
  (ローレンツ不変)

  4元運動量
  (エネルギー, 運動量) ⇝ $E = mc^2$

- 電磁気 : 修正されない

  ローレンツ不変性があらわな形に書ける

☆ さらにその先

- 相対論的量子力学 ⇒ 場の理論

  特殊相対論と量子力学を統一

  素粒子を記述する枠組み

- 一般相対論

  重力を記述する理論

  電磁気 ⇔ マックスウェル理論
  マックスウェル方程式

  重力 ⇔ 一般相対論
  アインシュタイン方程式